Оглавление

Авторский коллектив Власова А.П., Евсеева Н.В., Латанова Н.И.
Власова А.П., доцент каф. «Основы математики и информатики», (СУНЦ – 1), к.т.н.
Латанова Н.И., доцент каф. «Основы математики и информатики», (СУНЦ – 1), к.т.н.
Евсеева Н.В, учитель математики ГОУ лицей № 1580.
Рецензент: Блудова Ирина Валентиновна, доцент каф. «Основы математики и информатики», (СУНЦ – 1), к.ф-м.н.
Пособие было рассмотрено на заседании кафедры «Основы математики и информатики», (СУНЦ – 1) и рекомендовано к изданию.

Аннотация.

Пособие посвящено разбору и решению уравнений в целых числах. Актуальность подобных задач обусловлена появлением в новой версии ЕГЭ по математике 2010 года задач С6, которые связаны с рассматриваемой темой. В школьной программе эта тема затрагивается вскользь в восьмом классе, хотя задачи, основанные на решении уравнений в целых числах, часто встречаются на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения и на олимпиадах по математике в старших классах. В пособии также рассматривается связанная с решением уравнений в целых числах тема делимости чисел. Пособие рекомендуется абитуриентам, школьникам старших классов и преподавателям математики.

Глава 1. Основные понятия.

Теория решений уравнений в целых числах является классическим разделом элементарной математики. Конкретные задачи такого рода решались уже около 4 тысяч лет тому назад.

В школьной программе эта тема затрагивается вскользь в восьмом классе. Задачи, основанные на решении уравнений в целых числа, часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы и на олимпиадах по математике в старших классах и являются задачами повышенной сложности.

В 2010 году эти задачи С6 были включены в ЕГЭ по математике .

С решением уравнений в целых числах связана тема делимости чисел. Без знания основных принципов и теорем этой темы невозможно решение задач по исследуемой проблеме.

1.1.Признаки делимости натуральных чисел на 3,4,8,9,11.

Число $n \vdots 3$ (знак «$\vdots$» читается как « n делится») тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на число 3.

Например, число 674523 делится на число 3, так как сумма его цифр равна 6+7+4+5+2+3=27.

Число $n \vdots 4$ тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр делится на 4. Например, число 47816 делится на число 4, так как число 16 делится на число 4.

Число $n \vdots 8$ тогда и только тогда, когда число, составленное из трех последних цифр делится на число 8. Например, число 35128 делится на число 8, так как число 128 делится на число 8.

Число $n \vdots 9$ тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на число 9. Например, число 148671 делится на число 9, поскольку сумма его цифр равна 1+4+8+6+7+1=27.

Число $n \vdots 11$, когда сумма его цифр, стоящих в четных разрядах, либо равна сумме цифр, стоящих в нечетных разрядах, либо отличается от нее на число, кратное 11(отсчет разрядов начинается справа). Например, число 1474 делится на число 11, поскольку сумма его цифр, стоящих в четных разрядах, равна 8, сумма его цифр, стоящих в нечетных разрядах равна 8. Таким образом, эти суммы равны.

Любое число n представимо в десятичной системе счисления в виде $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, где цифры $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ могут принимать значения, равные 0,1,2,…,9, а цифра a_k может принимать значения, равные 1,……,9. Число n записывают в виде $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0}$.

1.2.Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится нацело на натуральное число b, то говорят, что число b является их общим делителем, а наибольший из общих делителей называется наибольшим общим делителем и обозначается или $НОД\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$,или $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Если натуральное число b является кратным для каждого из натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, то число b называется общим кратным чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, наименьшее число из кратных чисел называется наименьшим общим кратным и обозначается или $НОК\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$, или $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Числа называются взаимно простыми, если $НОД(a_1, a_2, \dots, a_n)$ =1.

При решении задач целесообразно использовать следующие утверждения.

- Два или три последовательных числа взаимно простые, т.е. $НОД(n, n+1, n+2) = 1$

- Для нахождения $НОД$ удобно применять алгоритм Евклида: если при делении a на b получается остаток r ,то $a = bq + r$ и $(a,b) = (a,r) = (b,r)$.

- Если $b > a$, то $(a,b) - (a,b-a)$.

- $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = a \cdot b$

- Если $(a,b) = 1$, то для любых n и $k \in N$ $(a^n, b^k) = 1$, где N – множество натуральных чисел.

- Если целое число c делит произведение $a \cdot b$, и при этом (a,c)=1, то число c делит число b.

- Если целые числа a, b, c, k связаны соотношением $a = bk + c$, то $(a,b) = (b,c)$

- Если $(a,b) = d$, то существуют целые числа x и y, такие что $d = ax + by$.

- Если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b.

Рассмотрим пример 1.1, результатом которого мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пример 1.1. Доказать, что любое целое число представимо в виде:

1) $3t$, или $3t \pm 1$; 2) $4t, 4t \pm 1, 4t \pm 2$; 3) $5t, 5t \pm 1, 5t \pm 2$;

4) $7t$, $7t \pm 1, 7t \pm 2$, $7t \pm 3$, где $t \in Z$; (коэффициент при t может быть любым целым числом), Z – множество целых чисел.

Докажем пункт 1). Пусть произвольное целое число n делится на 3, тогда получим $n = 3t + r$, где остаток $r = 0;1;2$. Если $r = 0$, то $n = 3t$; если $r = 1$, то $n = 3t + 1$, если $r = 2$, то $n = 3t + 2$ или $n = 3t + 3 - 1 = 3t_1 - 1$.

Доказательство пунктов 2) - 4) выполняются аналогично.

Пример 1.2. Найти наибольший общий делитель двух чисел при любом натуральном n:

а)

$НОД(9n + 17, 7n + 11) = (2n + 6, 7n + 11) = (5n + 5, 2n + 6) = (3n - 1, 2n + 6) = (n - 7, 2n + 6) = (n + 13, n - 7) = (20, n - 7)$

. Представим $n = 20t + r$, $r = 0,1,\ldots,19$. Подставляя различные значения для r, получаем, что остаток равен 7. Таким образом $n = 20t + 7, t \in N$

б) $НОД(3,3n+2)$. Число $(3n+2)$ должно делиться на 3, поэтому пусть $n=3t+r,$ где $r=0,1,2.$ Подставляя различные значения для r, получаем, что никакие из найденных чисел не делится на 3.

Таким образом, $НОД(3,3n+2)=1.$

в) $НОД(2n+3,n+7)=(n-4,n+7)=(n-4,11).$Пусть $n=11t+r.$

Подставляя различные значения для r, получим, что подходит число $r=4.$

г)

$НОД(2^{30}-1,2^{40}-1)=(2^{10}-1,2^{30}-1)=(2^{10}-1,2^{20}-1)=(2^{10}-1,2^{10}-1)=2^{10}-1.$

Пример 1.3. Докажите, что $НОД\left(\underbrace{11\ldots1}_{8},\underbrace{11\ldots1}_{100}\right)=\underbrace{1111}_{4}.$

Доказательство: $НОД\left(\underbrace{11\ldots1}_{8},\underbrace{11\ldots1}_{100}\right)=\left(\underbrace{11\ldots1}_{4},\underbrace{11\ldots1}_{8}\right)=\underbrace{1111}_{4}$

Пример 1.4. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

Доказательство

$НОД(12n+1,30n+2)=(18n+1,12n+1)=(6n,12n+1)=(6n,6n+1)=(6n,1=1).$

Пример 1.5. Сократима ли дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1}$?

Если сократима, то при каких n?

Преобразуем дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1}=n^2-n+\frac{4n+3}{20n+1}.$

Находим $НОД(4n+3,20n+1)=(16n-2,4n+3)=(12n-5,4n+3)=$

$=(8n-8,4n+3)=(4n-11,4n+3)=(14,4n-11).$

Так как число $4n-11$ нечетное, проверяем, делится ли оно на 7. Пусть $n=7t+r,$ где $r=0,1,2,3,4,5,6.$ Вычислим значение выражения $4n-11$ для различных значений r, получаем что число $4n - 11$ делится на 7 при r=1. Следовательно, исходная дробь сократима для $n = 7t + 1$.

Пример 1.6. Найти все натуральные числа n, при которых сократима дробь $\frac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}$.

Представим исходную дробь в виде $\frac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n} = \frac{(7n+4)(n+1)}{(6n+5)(n)}$.

Так как *НОД*$(n+1, n) = 1$ и *НОД* $(6n+5, n+1) = 1$, попробуем найти наибольший общий делитель $(7n+4, n)$ и $(7n+4, 6n+5)$:

НОД $(7n+4, n) = (n, 4)$, поэтому $n = 2t$;

НОД $(7n+4, 6n+5) = (n-1, 6n+5)$

Таким образом $6n+5 = 6(n-1)+11$,

Откуда следует, что *НОД*$(7n+4, 6n+5) - (n-1, 11)$ и $n - 11t + 1$

Следовательно $n = 2t, n = 11t + 1$

Пример 1.7. Найти все натуральные числа n, при которых сократима дробь $\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$.

Преобразуем дробь $\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5} = n^2 - n + \frac{9n-8}{3n-5}$

НОД$(3n-5, 9n-8) = (3n-5, 7)$.Откуда следует,что $n = 7t + r$, где r =0,1,2,3,4,5,6. Перебирая все остатки r, получаем $r = 4$.

Следовательно: $n = 7t + 4$

Пример 1.8. Найдите все натуральные числа n, при которых сократима дробь $\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}$.

Преобразуем дробь: $\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7} = n^2 - n + \frac{3n+2}{5n+7}$.

НОД $(5n+7, 3n+2)$ $=(2n+5, 3n+2) = (n-3, 2n+5) =$

$=(n+8, n-3) = (11, n-3)$

Следовательно: n=11t + 3

Пример 1.9. Найти все натуральные числа n, при которых сократима дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1}$.

Преобразуем дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1} = n^2 - n + \frac{4n+3}{20n+1}$.

$\text{НОД}\,(20n+1, 4n+3)$ = (4n+3,-14)

Следовательно n = 7t+1

Пример 1.10. Найти натуральные числа m и n, которые удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} m+n=20; \\ НОД(m,n)=5 \end{cases}$.

Пусть $m = 5t$, тогда при $t = 1,\ m = 5,\ n = 15$.

Следовательно, $m = 5,\ n = 15$

Пример 1.11.Найдите *НОК*$[7n+3, 5n+2]$

Используем формулу $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = a \cdot b$, из которой следует, что *НОК*$[7n+3, 5n+2] = \frac{(7n+3)(5n+2)}{(7n+3,5n+2)} = (7n+3)(5n+2)$.

Так как *НОД*$(7n+3, 5n+2) = (n,1) = 1$, то

НОК$[7n+3, 5n+2]$= $(7n+3)(5n+2)$

Пример 1.12. Найти наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и дает остаток равный 1, при делении на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 : оно равно 60. Тогда, исходя из условия задачи, получаем $7n = 60m + 1$. Если левая часть этого уравнения делится на 7, то и правая часть тоже должна делиться на 7.

Представив $m = 7t \pm r$, и подставляя в уравнение $7n = 60m + 1$ различные значения r , получим $m = 5$.

Таким образом искомое число равно 301.

Пример 1.13. Одна гирлянда из лампочек на елке зажигается через каждые 15 с, а другая гирлянда через каждые 12 с. В определенный момент времени гирлянды зажглись одновременно. Через сколько времени лампочки вновь зажгутся одновременно?

Ответом будет наименьшее общее кратное чисел 12 и 15.

НОК[12, 15]=60(с)

Пример 1.14. Два зубчатых колеса, одно из которых имеет 30 зубцов, а другое 40 зубцов, до начала вращения соприкасаются зубцами. Через сколько оборотов каждого колеса они будут в том же положении, как до начала вращения?

НОК [30, 40] = 120 оборотов.

Пример 1.15. Из одного парка утром на линию вышли три автобуса. Первый автобус после прохождения маршрута возвратится в парк через 90 мин.; второй - через 50 мин.; а третий - через 70 мин.

Через сколько времени после выхода автобусов из парка все три автобуса опять соберутся в парке?

НОК [90, 50, 70] = 3150 мин.

Пример 1.16. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз? (Олимпиада Ломоносов-2009).

Пусть $d = НОД(m,n)$, тогда $НОД(m+6,n) = 9d$. Отсюда следует, что числа m и n делятся на d, поэтому число $m+6$ тоже делится на d. Таким образом, число 6 должно делится на d. Делителями числа 6 являются числа 2,3,6. Проверкой убеждаемся, что все эти делители подходят.

Таким образом $НОД(m,n)$ равен любому из чисел 2,3 или 6.

Пример 1.17. (МГУ, факультет государственного управления, 2009)

Укажите наименьшее натуральное число, отличное от 1, которое при делении на каждое из чисел 2, 3, 5 и 9, дает в остатке 1.

Пусть n искомое натуральное число, тогда

$n = 2a + 1 = 3b + 1 = 5c + 1 = 9d + 1$, откуда следует, что число $n - 1$ должно одновременно делиться на 2, 5 и 9. Получаем $n =$ [2,5,9] + 1 =91.

Ответ: 91.

Пример 1.18. Найти хотя бы одну пару целых чисел x и y таких, что $ax + by = d$, где $d = (a, b)$

Пусть $a = 7$ и $b = 5$, тогда $d(7,5) = 1.$ При $x = -2; y = 3$ выполняется равенство $-2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 1.$

Пусть $a = 15, b = 25$. Тогда $d(25,15) = 5.$ **При** $x = -3; y = 2$

выполняется равенство $-3 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 5.$

Пример 1.19. Докажите, что если $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на k, то число $ad - bc$ делится на k.

Из условия примера имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} al + b = kn; \\ cl + d = km \end{cases} \qquad (1.1)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на d, а второе на b, получим

$$\begin{cases} dab + db = knd; \\ bcl + bd = bkm \end{cases} \qquad (1.2)$$

Каждое уравнение системы (2) разделим на l:

$$\begin{cases} ad + \frac{db}{l} = \frac{knd}{l}; \\ bc + \frac{db}{l} - \frac{bkm}{l} \end{cases} \qquad (1.3)$$

Вычитая из первого уравнения системы (1.3) второе, получим :

$ad - bc = k\left(\frac{nd}{l} - \frac{bm}{l}\right)$, что и требовалось доказать.

Пример 1.20. Найти натуральные числа a и b, такие что их разность равна 18, а наименьшее общее кратное равно 165.

Из условия примера имеем $a - b = 18$, $\frac{165}{a} = n$, $\frac{165}{b} = m$. Отсюда $\frac{165}{n} = a$, $\frac{165}{m} = b$ и $\frac{165}{n} - \frac{165}{m} = 18$.

Приводя к общему знаменателю, получим $55(m - n) = 6mn$.

Это равенство выполняется, если $m - n = 6$; $mn = 55$.

Таким образом $m = 11$, $n = 5$; $a = \frac{165}{5} = 35$; $b = \frac{165}{11} = 15$.

Пример 1.21. Найти натуральные числа a и b, такие что сумма их квадратов равна 13, а наименьшее общее кратное равно 6.

Из условия примера имеем $a^2 + b^2 - 13$, $\frac{6}{a} - n$, $\frac{6}{b} - m$. Отсюда $\frac{6}{n} - a$ $\frac{6}{m} - b$. Тогда $\frac{36}{n^2} + \frac{36}{m^2} - 13$ или $36(m^2 + n^2) = 13n^2 \cdot m^2$, откуда получаем $n - 3$, $m - 2$, и $a - \frac{6}{3} - 2$, $b - \frac{6}{2} - 3$.

Пример 1.22. Докажите, что число $\overline{ab} - \overline{ba}$ делится на 9.

Числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ имеют одинаковую сумму цифр $a + b$ и, следовательно, одинаковые остатки от деления на 9. Поэтому эти остатки при вычитании уничтожатся. Таким образом, получим утверждение: если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Пример 1.23. Докажите, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

Запишем сумму в виде $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$. Что и требовалось доказать.

Пример 1.24. Найти цифру X, при которой число $\overline{36X847X}$ делится на 3.

Так как число $\overline{36X847X}$ делится на 3 при условии, что сумма цифр этого числа делится на 3, то найдем сумму цифр: $3+6+X+8+4+7+X=28+2X$.

При $X=1,4,7$ эта сумма цифр делится на 3.

Пример 1.25. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

Запишем сумму квадратов двух нечетных чисел как

$(2n+1)^2++(2m+1)^2=4n^2+4n+1+4m^2+4m+1=4q+2,$ где $q=n^2++m^2+n+m$

.

При делении на 4 получившееся число дает в остатке 2, чего быть не может, так как остаток от деления квадрата целого числа дает в остатке 0 или 1. Докажем это.

Пусть некоторое целое число $k=4t+r,$ где $r=0,1,2,3.$ Остаток от деления k^2 будет равен остатку от деления r^2.

Учитывая, что $r^2=0,1,4,9,$ получаем ответ: при делении на 4 остаток равен 0 или 1, что и требовалось доказать.

Пример 1.26. Докажите, что сумма $10^n-1+18n$ делится на 27.

Запишем исходное число в виде:

$$9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+18n=9\left(\underbrace{11\ldots1}_{n}+2n\right).$$

Докажем теперь, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n}+2n$ делится на 3.

Используем метод математической индукции:

1) для $n=1$ получаем $1+2=3;$

2) предположим , что наше утверждение справедливо для $n=k$ и число $\underbrace{11\ldots1}_{k}+2k$ делится на 3, тогда и число 10 ($\underbrace{11\ldots1}_{k}+2k$) тоже будет делиться на три;

3) докажем, что наше утверждение справедливо и для $n = k + 1$.

При этом значении n получаем $\underbrace{11\ldots1}_{k+1} + 2(k+1) =$

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}0 + 1 + 2k + 2 =$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}0 + 20k - 20k + 3 + 2k = \left(10\left(\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k\right) - 20k + 3 + 2k\right) =$$

$10\left(\underbrace{11\ldots1}_{k} + 2k\right) - 18k + 3$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1.1. Сократима ли дробь $\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}$? Если сократима, то при каких n?

Ответ: сократима для $n = 11t + 3$.

Задача 1.2. Сократима ли дробь $\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$? Если сократима, то при каких n?

Ответ: сократима для $n = 7t + 4$.

Задача 1.3.Найдите $\text{НОД}(4, 2n+1)$

Ответ: 1

Задача 1.4. $\text{НОД}(n^6 - n^2, 10)$

Ответ: 10

Задача 1.5. Найти натуральные числа m и n, для которых выполняется система $\begin{cases} m \cdot n = 6 \\ \text{НОД}(m,n) = 1 \end{cases}$.

Ответ: $m = 2,\ n = 3$.

Задача 1.6. Найдите НОК$[3n+1, 5n+2]$

Ответ: $(3n+1)(5n+2)$

Задача 1.7. Из одного порта вышли три парохода. Первый пароход доходит до порта назначения и возвращается обратно в порт через 6 суток, второй – через 9 суток, третий – через 4 суток. Через сколько суток после начала навигации все три парохода вновь вернутся в порт?

Ответ: 36.

Задача 1.8. Отец и сын измеряли шагами расстояние между деревьями. Длина шага отца 70 см., длина шага сына 50 см. Каково расстояние между деревьями, если след отца и сына совпал десять раз, включая начальный и конечный?

Ответ: 31,5 м.

Задача 1.9. Найдите наименьшее четырехзначное число, которое делится на 9, а при делении на 4 дает в остатке 3.

Ответ: 1027.

Задача 1.10. (МГУ) Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающимся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 мин соответственно. Сколько раз в день в период с 10 час. 40 мин. до 14 час.20 мин. того же дня у этой станции метро одновременно встречаются такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 13 час.05 мин. (МГУ).

Ответ: 4

Глава 2.Диофантовы уравнения

Александрийский математик Диофант, живший около 2 тысяч лет тому назад, решил большое число таких уравнений и описал общие методы их решения в своей книге «Арифметика». Уравнения в целых числах называют ***диофантовыми*** уравнениями.

Примером диофантового уравнения является уравнение вида:

$$ax + by = 0 \qquad (2.1)$$

Подобные уравнения называются ***однородными линейными уравнениями***. Они имеют бесконечно много решений в целых числах. Эти решения описываются формулами : $x_n = bn, y_n = -an,\ n \in Z$.

2.1. Однородные линейные уравнения

Пример 2. 1. На кольцевой дороге проводилась эстафета велосипедистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы

55 км., а длина каждого этапа – 25 км, (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета? Место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

Спортсмены проходят путь равный $25 \cdot k\ км,$ где k – целое число. Этот путь должен равняться целому числу кругов или $55 \cdot n\ км$.

Получили уравнение $25км \cdot k = 55км \cdot n,$ или $5 \cdot k\ км = 11 \cdot n\ км,$

откуда $n - 5, k - 11.$

Следовательно: число пунктов равно 11, расстояние между пунктами равно $\frac{55}{11} = 5км.$

Пример 2.2. На кольцевой дороге проводилась эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находились в одном и том же месте. Длина кольцевой трассы 176 км., а длина каждого этапа – 80 км , (движение одностороннее). Сколько было пунктов, в которых передавалась эстафета? Место старта тоже считать за пункт. Каково расстояние между соседними пунктами?

Решение данного примера аналогично решению примера 1.1.

Число пунктов равно 11, расстояние между пунктами равно 16 км.

Пример 2.3. Трамвай курсирует по кольцевой трассе длиной, равной 5 км. Начало и конец маршрута не совпадают. Сколько остановок находится на маршруте трамвая, если расстояние между остановками равно 3 км? Найдите также длину маршрута трамвая.

Решение данного примера аналогично решению примера 1.1.

Число остановок на маршруте равно 5, длина маршрута 15 км.

2.2. Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородные линейные уравнения вида

$$ax + by = c \qquad (2.2)$$

которые решаются в целых числах, коэффициенты $a, b, c -$ целые числа.

При решении таких уравнений следует иметь в виду следующие теоремы.

Теорема 2.1. Если число c не делится на НОД(a, b), то уравнение (2.2) не имеет решений.

Теорема 2.2. Если $(x_0; y_0)$ - какое либо целочисленное решение уравнения (2.2), то любые числа вида:

$$\begin{cases} x = x_0 - bt; \\ y = y_0 + at, \end{cases}$$

где t - произвольное целое число, также являются решениями уравнения (2.2).

Пример 2.4. *(Олимпиада МГУ, 1969)* Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Из условия примера получим систему уравнений

$$\begin{cases} n = 6k + 4 \\ n = 15t + 7 \end{cases}, \text{ где } k, t \in N \qquad (2.3)$$

Отсюда

$$2k - 5t = 1. \qquad (2.4).$$

Как следует из уравнения (2.3), *НОД*(2,5)=1, поэтому решение имеется.

Решим уравнение (2.4), выразив переменную k через t, так как коэффициент при k меньше по модулю, чем при t. Получим $k = \frac{5t+1}{2}$ или $k = 2 + \frac{t+1}{2}$. Чтобы число k было целым, то дробь должна быть целой. Для этого примем t=1, и тогда получим k =3. Это будет некоторое частное решение и решения уравнения (2.4) запишутся в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} k = 3 + 5m \\ t = 1 + 2m \end{cases}, \quad m \in Z.$$

Подставив полученные значения k и t в систему уравнений (2.3), получим $n = 6(3 + 5m) + 4 = 22 + 30m$ и $n = 15(1 + 2m) + 7 = 22 + 30m$.

Следовательно: остаток от деления n на 30 равен 22.

Пример 2.5. На станцию привезли 420 т.угля в вагонах вместимостью 15т, 20т, 25т. Сколько таких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

Пусть было использовано x, y, z вагонов вместимостью 15т, 20т, 25т. Тогда условие примера будет удовлетворять системе ураавнений:

$$\begin{cases} 15x + 20y + 25z = 420 \\ x + y + z = 27 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим:

$$15(27 - y - z) + 20y + 25z = 420,$$

$$\text{или} \quad y + 2z = 3,$$

откуда $y = z = 1, x = 25$.

Следовательно: было использовано 25 вагонов вместимостью 15т, 1 вагон вместимостью 20т и 1 вагон вместимостью в 25 т.

Пример 2.6. (ЕГЭ, 2010) Найдите все целые решения уравнения

$$113x + 179y = 17 \qquad (2.5)$$

удовлетворяющие неравенствам $x > 0, y + 100 > 0.$

Используем один из вариантов Евклида.

Выразим переменную x , перед которой стоим меньший коэффициент, из уравнения (2.5).Получим

$$x = \frac{-179y+17}{113} = -y + \frac{-66y+17}{113}. \qquad (2.6)$$

Введем новую переменную:

$$x_1 = x + y, \text{ где } x_1 = \frac{-66y_1+17}{47}.$$

Тогда уравнение (2.5) запишется в виде

$$113x_1 = -66y + 17. \qquad (2.7)$$

Вновь выразим переменную с меньшим коэффициентом, в данном случае y из уравнения (2.7):

$$y = \frac{-113x_1+17}{66} = -x_1 + \frac{-47x_1+17}{66}. \qquad (2.8)$$

Введем новую переменную:

$$y_1 = y + x_1, \text{ где } y_1 = \frac{-47x_1+17}{66}.$$

Тогда уравнение (2.7) запишется как

$$66y_1 = -47x_1 + 17. \qquad (2.9)$$

Выразим переменную с меньшим коэффициентом из уравнения (2.9):

$$x_1 = \frac{-66y_1+17}{47} = -y_1 + \frac{-19y_1+17}{47}. \qquad (2.10)$$

Опять введем новую переменную:

$$x_2 = y_1 + x_1, \text{ где } x_2 = \frac{-19y_1+17}{47}$$

Уравнение (2.9) будет иметь вид:

$$47x_2 = -19y_1 + 17. \qquad (2.11)$$

Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом y_1 из уравнения (2.11):

$$y_1 = \frac{-47x_2+17}{19} = -2x_2 + \frac{-9x_2+17}{19}. \qquad (2.12)$$

Введем новую переменную: $y_2 = y_1 + 2x_2$, где $y_2 = \frac{-9x_2+17}{19}$.

Подставим ее в уравнение (2.11): $19y_2 = -9x_2 + 17.$ (2.13)

Выразим переменную x_2 из уравнения (2.13):

$$x_2 = \frac{-19y_2+17}{9} = -2y_2 + \frac{-y_2+17}{9}. \qquad (2.14)$$

Обозначим новую переменную:

$$x_3 = x_2 + 2y_2, \text{ где } x_3 = \frac{-y_2+17}{9}$$

Тогда уравнение (2.13) запишется в виде уравнения:

$$9x_3 = -y_2 + 17. \qquad (2.15)$$

В итоге, преобразованное с помощью алгоритма Евклида уравнение (2.5) , приведено к уравнению (2.15).

Общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = t, \\ y_2 = -9t + 17, \end{cases} t \in Z.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим, что

$$x_3 = x_2 + 2y_2 = 5x_2 + 2y_1 = 5x_1 + 7y_1 = 12x + 19y = t;$$

$$y_2 = y_1 + 2x_2 = 3y_1 + 2x_1 = 3y + 5x_1 = 8y + 5x = -9t + 17.$$

С учетом последних равенств, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x + 19y = t; \\ 8y + 5x = -9t + 17. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Решив систему (2.16) относительно переменных x и y, запишем общее решение для исходного уравнения:

$$\begin{cases} x = 179t - 323 \\ y = -113t + 204 \end{cases}, \qquad t \in Z.$$

Принимая во внимание условия $x > 0, y + 100 > 0$, находим $t = 2$, $x = 35, y = -22$. Следовательно: $x = 35, y = -22$.

Пример 2.7. Решите в целых числах уравнеие: $25x - 18y + 1 = 0$.

Найдем наибольший общий делитель пары чисел 25 и 18 с помощью цепных дробей , то есть используем один из вариантов алгоритма Евклида.

Преобразуем неправильную дробь $\frac{25}{18}$, последовательно выделяя целые части неправильных дробей:

$$\frac{25}{18} = 1 + \frac{7}{18} = 1 + \frac{1}{\frac{18}{7}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{4}{7}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{7}{4}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}},$$

где выражение $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$ называется цепной дробью.

Числа 1, 2, 1, 1, выделенные в этом выражении, являются последовательными частными алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя пары чисел 25 и 18.

Отбросим дробь 1/3 и преобразуем получившуюся цепную дробь в обыкновенную:

$$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

Вычтем полученную дробь из исходной дроби $\frac{25}{18}$:

$$\frac{25}{18} - \frac{7}{5} = \frac{125 - 126}{18 \cdot 5} = \frac{-1}{18 \cdot 5}.$$

Приведем ее к общему знаменателю: $25 \cdot 5 - 18 \cdot 7 + 1 = 0$.

Получили частное решение исходного уравнения $x = 5, y = 7$.

Общее решение исходного уравнения: $x = 5 + 18t;\ y = 7 + 25t, t \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 2.1. Родительский комитет закупил на 750 рублей тетради по цене 35 рублей и ручки по цене 25 рублей. Сколько было куплено тетрадей и ручек, если ручек было куплено больше, чем тетрадей, а разница между количеством ручек и тетрадей наименьшая. Ответ:16 ручек, 10 тетрадей.

Задача 2.2. На празднике всем ребятам раздали подарки, в которые был положены 350 мандаринов по 3мандарина или по 4 мандарина в подарок. Сколько было подарков, если подарков, в которых находятся 3 мандарина больше 47 и меньше 53. Ответ:100.

Задача 2.3. Тема сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе 100руб. Давая сдачу с этой суммы, кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1руб. 40 коп., Тема обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Темы? (МГУ, 2005, факультет управления) Ответ: 69 рублей 43коп.

Задача 2.4. Какое наименьшее число банок по 0,5л и 0,4л понадобится маме, чтобы разложить 3 л варенья? Ответ: 2 банки по 0,5л. и 5 банок по 0,4л.

Задача 2.5. Можно ли набрать 25 рублей монетами по 5 рублей и по 2 рубля?

Ответ: можно, 1монета по 5 рублей и 10 монет по 2 рубля.

Задача 2.6. Конфеты массой 13 кг. распределили в коробки по 3 кг. и по 5 кг. Какое наименьшее количество таких коробок понадобится?

Ответ: 1 коробка по 3кг и 2 коробки по 5кг.

Глава 3.Дробно – рациональные уравнения.

Эта глава посвящена решению уравнений вида:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \qquad (3.1)$$

в целых числах.

Избавляясь от знаменателя в уравнении (3.1) , запишем его так:

$$zy+zx=xy. \qquad (3.2)$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (3.2) z^2, получаем уравнение:

$$xy-zy-zx+z^2=z^2, \qquad (3.3)$$

$$y(x-z)-z(x-z)=z^2,$$

$$\text{или } (x-z)(y-z)=z^2 \qquad (3.4).$$

Уравнение (3.4) имеет столько решений в целых числах, сколько существует делителей у z^2 минус единица.

Пусть d - делитель z^2, тогда решения (3.4) получают из решения совокупности систем :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-z=d;\\ y-z=\dfrac{z^2}{d};\end{cases}\\ \begin{cases}x-z=-d;\\ y-z=-\dfrac{z^2}{d}.\end{cases}\end{array}\right.$$

В случае, если делитель $d=-z$, система

$$\begin{cases}x-z=-z\\ y-z=-z\end{cases}$$

дает решение $x=0;y=0$, которое не имеет смысла.

Пример 3.1. Решить в натуральных числах уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}; \text{где } x\geq y$$

Преобразуем исходное уравнение:

$$xy-8x-8y+64=64;\ (x-8)(y-8)=64; x-8=d; y-8=64/d.$$

Перебираем натуральные делители числа 64 и результат для удобства записываем в таблицу. Из таблицы выбираем пары чисел, соответствующие условию примера $x \geq y$.

d	1	2	4	8	16	32	64
x	9	10	12	16	24	40	72
y	72	40	24	16	12	10	9

В результате получаем: (16;16);(24;12);$(40;10),(72;9)$

Пример 3.2. Решить в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

Преобразуем исходное уравнение:

$xy-3x-3y+9=9$; (x-3)(y-3)=9.

Перебираем натуральные делители числа 9 и результат для удобства записываем в таблицу, из которой получаем следующий ответ: (4;12);(6;6);$(12;4)$.

d	1	3	9
x	4	6	12
y	12	6	4

Пример 3.3. Решить в целых числах уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9}; x>y$.

После преобразования исходного уравнения получаем:

$$(x-9)(y-9)=81.$$

Перебираем натуральные делители числа 81 и результаты записываем в таблицу, из которой получаем пары чисел, соответствующие условию примера $x>y$:

(36;12);(90;10);$(8;-72);(6;-18)$

d	1	3	9	27	81	-1	-3	-9	-27	-81
x	10	12	18	36	90	8	6	0	-18	-72
y	90	36	18	12	10	-72	-18	0	6	8

Пример 3.4. *(ЕГЭ, 2010)* Решите в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{25}$; где $x>y$.

Данный пример решают аналогично примерам 3.1 – 3.3 и получают пары чисел (150;30);(650;26).

Пример 3.5. *(ЕГЭ, 2010)* Найдите все пары натуральных чисел различной четности, удовлетворяющие уравнению: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$.

Данный пример решают аналогично примерам 3.1 – 3.3 и получают пары чисел (13;156);(15;60); (21;28);(156;13);$(60;15);(28;21)$

Глава 4. Нелинейные уравнения.

При решении подобных уравнений, как правило, необходимо ограничить перебор различных вариантов. Для этого используют различные методы.

4.1.Разложение на множители.

Пример 4.1. Решить в натуральных числах уравнение $xy-7y+3x=39$.

Используя разложение на множители, приведем уравнение к следующему виду:

$$(x-7)(y+3)=18.$$

Полученное уравнение равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x-7=2 \\ y+3=9 \end{cases}, & (4.1) \\ \begin{cases} x-7=9 \\ y+3=2 \end{cases}, & (4.2) \\ \begin{cases} x-7=3 \\ y+3=6 \end{cases}, & (4.3) \\ \begin{cases} x-7=6 \\ y+3=3 \end{cases}, & (4.4) \\ \begin{cases} x-7=1 \\ y+3=18 \end{cases}, & (4.5) \end{array}\right.$$

Решением системы уравнений (4.1) является пара $(9;6)$;

Решениемсистемы уравнений (4.2) является пара $(2,-1)$

Решением системы уравнений (4.3) является пара (10,3)

Решениемсистемы уравнений (4.4) является пара (13,0)

Решением системы уравнений (4.5) является пара (8,15)

Выбирая подходящие решения в виде натуральных чисел, получаем следующий ответ: (10,3), (9;6); (8,15) .

Пример 4.2. Решить в целых числах уравнение: $x^2 = y^2 + 6y + 21$

Преобразуем исходное уравнение:

$(x - y - 3)(x + y + 3) = 12.$

Полученное уравнение равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y - 3 = 3; \\ x + y + 3 = 4; \end{cases} & (4.6) \\ \begin{cases} x - y - 3 = 4; \\ x + y + 3 = 3; \end{cases} & (4.7) \\ \begin{cases} x - y - 3 = 2; \\ x + y + 3 = 6; \end{cases} & (4.8) \\ \begin{cases} x - y - 3 = 6; \\ x + y + 3 = 2; \end{cases} & (4.9) \\ \begin{cases} x - y - 3 = -2; \\ x + y + 3 = -6; \end{cases} & (4.10) \\ \begin{cases} x - y - 3 = -6; \\ x + y + 3 = -2. \end{cases} & (4.11) \end{array}\right.$$

Решением системы уравнений (4.6) является пара $\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$;

Решением системы уравнений (4.7) является пара $\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

Решением системы уравнений (4.8) является пара (4; 1)

Решением системы уравнений (4.9) является пара $(4; -5)$

Решением системы уравнений (4.10) является пара $(-4; -5)$

Решением системы уравнений (4.11) является пара $(-4; -1)$

Выбирая подходящие решения в виде целых чисел, получаем следующий ответ: (4;-1),(4;-5),(-4;-5),(-4;-1)

Пример 4.3. Автоколонне поручили перевезти некоторый груз. В автоколонне имеются три машины разной грузоподъемностью. Машина наименьшей грузоподъемностью может перевезти весь груз за 32 рейса, а две другие машины – за 5 совместных рейса. Сколько рейсов сделает машина с наибольшей грузоподъемностью, чтобы перевезти весь груз?

Пусть $Q -$ груз, $k, m, n -$ число рейсов для каждой машины с разной грузоподъемностью, причем $32 > k > m > n > 5$.

Тогда $5\left(\frac{Q}{m}+\frac{Q}{n}\right)=Q$, откуда $5(m+n)=mn$

или $(m-5)(n-5)=25$ и $m=30, n=6$.

Следовательно, машина с наибольшей грузоподъемностью выполнит 6 рейсов.

Пример 4.4. Решите в натуральных числах уравнение $xy - 2011(x+y)$.

Прибавим к обеим частям исходного уравнения число 2011^2 и разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x-2011)(y-2011)=2011^2 \qquad (4.12)$$

Число 2011 – простое, поэтому все решения уравнения (4.12) можно получить, решив совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2011=1 \\ y-2011=2011^2 \end{cases} ;\text{откуда } x=2012, y=4046132; \\ \begin{cases} y-2011=1 \\ x-2011=2011^2 \end{cases} ;\text{откуда } x=4046132, y=2012; \\ \begin{cases} x-2011=2011 \\ y-2011-2011^2 \end{cases} ;\text{ откуда } x=4022, y=4022. \end{array}\right.$$

Следовательно, решением будут пары чисел:

(2012,4046132);(4046132, 2012);(4022,4022).

Пример 4.5. Решить в целых числах: $2xy-8y+x-9=0$.

Приведем исходное уравнение к виду: $2xy-8y+x-4-5=0$ или

$$2y\cdot(x-4)+(x-4)=5. \qquad (4.13)$$

Разложив на множители уравнение (4.13), получим:

$$(2y+1)(x-4)=5. \qquad (4.14)$$

Уравнение (4.14) равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y+1-1;\\ x-4=5.\end{cases}\\ \begin{cases}2y+1=-1;\\ x-4=-5.\end{cases}\\ \begin{cases}2y+1=5;\\ x\quad 4=1.\end{cases}\\ \begin{cases}2y+1=-5;\\ x-4=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим данные системы уравнений, объединим эти решения и получим следующий ответ: (5;2) (3;-3) (9;0) (-1;-1)

Пример 4.6. (ЕГЭ, 2010) Найти все целые решения уравнения:

$3x^2+4xy-7y^2=13.$

Решим уравнение

$$3x^2+4xy-7y^2=0$$

относительно переменной x:

$$x_1=\frac{-2y+\sqrt{4y^2+21y^2}}{3}=y,\quad x_2=\frac{-2y-\sqrt{4y^2+21y^2}}{3}=\frac{-7y}{3}.$$

Разложив левую часть исходного уравнения на множители, получаем:

$$(x-y)(3x+7y)=13, \qquad (4.15)$$

где $x-y$ и $3x+7y$ - целые числа.

Уравнение (4.15) равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1;\\ 3x+7y=13.\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-1;\\ 3x+7y=-13.\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=13;\\ 3x+7y=1.\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-13;\\ 3x+7y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив данные системы уравнений, получим следующий ответ: (2;1),(-2;1).

Пример 4.7. (МГУ, 2003) Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2+5=3y^2+5xy$.

Перепишем исходное уравнение в виде: $3y^2 + 6xy - xy - 2x^2 = 5$ и разложим его на множители:

$$(3y - x)(y + 2x) = 5. \qquad (4.16)$$

Число 5 простое, поэтому уравнение (4.16) равносильно решению совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y - x = 1; \\ y + 2x = 5. \end{cases} \\ \begin{cases} 3y - x = -1; \\ y + 2x = -5. \end{cases} \\ \begin{cases} 3y - x = 5; \\ y + 2x = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} 3y - x = -5; \\ y + 2x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Исходя из условия целочисленности решения получаем следующие ответы: (2;1), (-2;-1)

Пример 4.8. (ЕГЭ, 2010) Решите в целых числах уравнение:

$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Перепишем исходное уравнение в виде: $2x^2 - x - 2xy + 10x + y = 2$.

Разложим его на множители:

$$(1 - 2x)(x - y + 5) = 3. \qquad (4.17)$$

Число 3 простое, поэтому уравнение (4.17) равносильно решению совокупности следующих систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - 2x = 1; \\ -y + x + 5 = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 2x = -1; \\ -y + x + 5 = -3. \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 2x = 3; \\ -y + x + 5 = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 2x = -3; \\ -y + x + 5 = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Целочисленные решения получаются во всех приведенных системах: (0;2), $(-1;3)$, $(1;9)$, (2;8).

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 4.1. Решить уравнение в целых числах $5x^2 + 6xy + y^2 = -7$

Ответ: (2;-9),(-2;3),(-2;9),(2;-3)

Задача 4.2. Решить уравнение в целых числах $3x^2+5xy+2y^2-7$

Ответ: (5;-4),(-13;20),(-5;4),(13;-20)

Задача 4.3. Решить уравнение в целых числах $xy=x+y+3$.

Ответ: (2;5),(0;-3),(3;3),(-1;-1),(5;2),(-3;0)

Задача 4.4. Решить уравнение в целых числах $x^2=y^2+2y+13$.

Ответ: (4;1),(4;-3),(-4;-3),(-4;1)

Задача 4.5. Решить уравнение в целых числах $xy+x-3y=-4$.

Ответ: (-4;0),(2;6),(4;-8),(10;-2)

Задача 4.6. Решить уравнение в целых числах $x^2-3xy+2y^2=7$. (МГУ, 2003)

Ответ: (5;6),(13;6),(-5;-6),(-13;-6)

Задача 4.7. Решить уравнение в натуральных числах $x^2-y^2=69$.

Ответ: (35;34),(13;10).

4.2. Сравнение левой и правой частей уравнения по модулю.

Пример 4.9. (МГУ, ВМК, 1997, устный экзамен)

Решить в целых числах уравнение: $x^2-7y^2=5$.

Представим исходное уравнение в виде

$$x^2-5=7y^2 \tag{4.18}$$

Правая часть уравнения (4.18) делится на 7, следовательно, и левая часть должна делиться на 7. Пусть $x=7t+r$, где остаток $r=0,1,2,3,4,5,6$. Подставляя в уравнение (4.18) выражение для x с различными значениями r, получаем, что левая часть уравнения (4.18) делится на 7. Таким образом, исходное уравнение решений нет.

Пример 4.10. Решить в целых числах уравнение $4x+6y-9$.

Левая часть исходного уравнения - четное число, а правая - нечетна, следовательно исходное уравнение решений не имеет.

Пример 4.11. Решить в целых числах уравнение $15x-12y=7$.

Левая часть исходного уравнения делится на 3, а правая не делится на 3. Следовательно, уравнение решений не имеет.

Пример 4.12. Решить в целых числах уравнение $2x^2 - 1 = 2xy$.

Перепишем исходное уравнение в виде $2x^2 - 2xy = 1$. Левая часть этого уравнения – четное число, а правая - нечетна. Следовательно, уравнение решений не имеет.

Пример 4.13. Решить в натуральных числах уравнение $2^n + 7 = k^2$.

При k четном $(k = 2t)$ и $n > 1$ при делении правой части исходного уравнения на 4, получаем остаток, равный нулю, а при делении на 4 левой части уравнения получаем остаток, равный 3. Следовательно: уравнение решений не имеет.

При k нечетном $(k = 2t + 1)$ и $n > 1$ при делении правой части исходного уравнения на 4, получаем остаток, равный единице , а при делении на 4 левой части получаем остаток, равный 3. Следовательно: уравнение решений не имеет.

Пусть при $n = 1$, тогда $k = 3$. Это и есть решение уравнения.

Пример 4.14. Существует ли целое число такое, что

$x^3 - 3x^2 + 2x + 2011 = 0$?

Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$x(x-1)(x-2) = -2011 \qquad (4.19)$$

Левая часть уравнения (4.19) делится на 6 как произведение трех последовательных чисел, а число 2011 не делится на 6.

Следовательно: целого числа не существует.

Пример 4.15. Решить в целых числах уравнение 21x + 35y=17

Вынесем из левой части исходного уравнения число 7 и получим:

$7 \cdot (3x + 5y) = 17$. Очевидно, что левая часть этого уравнения кратна 7, а правая - нет.

Следовательно, такое уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 4.16. Решить в натуральных числах уравнение: $2x - 15 = y^2$.

Перепишем исходное уравнение в виде $2x = 15 + y^2$.

Если есть решение уравнения , то его правая часть должна делиться на 2. Пусть $y = 2t + r$, где $r = 0,1$. Решение получаем при $r = 1$ и $y = 2t + 1$.

При $t = 0$ получаем $x = 4$, $y = 1$.

Так как правая часть исходного уравнения является квадратом целого числа, то $x = 4, y = -1$ так же является решением.

Пример 4.17. (ЕГЭ, 2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$

Пусть n - четное число, то есть $n = 2k$.

Тогда $2^m = (3^k - 1)(3^k + 1)$ (4.20)

Правая часть уравнения (4.20) представляет произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Отсюда получаем, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$.

Таким образом, находим, что $k = 1$ и $n = 2$, а $m = 3$.

Пусть n – нечетное число. Нечетная степень числа 3 при делении на 4 дает остаток, равный 3. Значит, число $3^n - 1$ делится на 4 с остатком, равным 2. Так как при $m \geq 2$ число 2^m делится на 4 без остатка, то равенство $2^m = 3^n - 1$ возможно в случае $m = 1$, и $n = 1$.

Таким образом, уравнение (4.20) имеет два решения:

$n = 2, m = 3$ и $m = 1, n = 1$

Пример 4.18. (ЕГЭ, 2010) Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Пусть n - четное число, то есть $n = 2k$. Тогда при любом k число $3^{2k} + 1$ при делении на 8 дает остаток, равный 2. При нечетном n, то есть $n = 2k$+1 , число $3^{2k+1} + 1$ при делении на 8 дает остаток, равный 4.

Так как при $m \geq 3$ число 2^m делится на 8 без остатка, то равенство $2^m = 3^n + 1$ возможно в случае $m = 1$ или $m = 2$.

Если $m=1$, то число $n=0$ и не является натуральным. Если $m=2$, то получаем $n=1$.

Пример 4.19. (ЕГЭ, 2010) Решите в натуральных числах уравнение $2^x-15=y^2$.

Пусть $x-$ нечетное число и $x=2k+1$. Тогда $2^x=2^{2k+1}=2\cdot 2^{2k}$, причем $2^{2k}=4^k=(3+1)^k$. Число $(3+1)^k$ при делении на 3 дает в остатке 1. Следовательно, число 2^{2k+1} при делении на 3 дает в остатке 2.

При делении правой части исходного уравнения y^2 на 3 в остатке получим 0 или 1. Докажем последнее утверждение. Пусть $y=3t+r$, где $r^2=0,1,2$, тогда $y^2=3q+r^2$. Остатки при делении y^2 на 3 будут такими же, как и при делении r^2 на 3. Учитывая возможные значения r, получаем, что остаток может быть равным либо 0 либо 1.

Число 15 делится на 3 без остатка, поэтому получаем, что исходное уравнение при $x=2k+1$ решений не имеет.

Пусть $x=2k$ - четное число. Тогда $2^{2k}-y^2=15$. Откуда

$$(2^k-y)(2^k+y)=15. \qquad (4.21)$$

Так как множитель (2^k+y) положительный, то и множитель (2^k-y) положительный.

Уравнение (4.21) равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2^k-y)=1;\\(2^k+y)=15.\end{cases}\\ \begin{cases}(2^k-y)=3;\\(2^k+y)=5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая эти системы, получаем следующий ответ: $(4;1);(6;7)$

Пример 4.20. Решите в натуральных числах

$$3^m+7=2^n.$$

Левая часть исходного уравнения при делении на 3 дает остаток, равный 1. В правой части уравнения стоят степени числа 2.

Степени числа 2 оканчиваются цифрами 2, 4, 8, 6, а при делении на 3 остаток, равный 1, дают только четные степени, то есть $n - 2k$.

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$3^m = 2^{2k} - 7 = 4^k - 7.$$

Выражение $4^k - 7$, стоящее в правой части уравнения (4.12), при делении на 4 дает остаток, равный 1.

Остаток, равный 1, дают только четные степени числа 3. Значит, m - тоже четное число ($m = 2p$).

Таким образом, $3^{2p} = 2^{2k} - 7$ или $7 = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$.

Учитывая, что оба множители положительны, получаем:

$2^k + 3^p = 7$, $2^k - 3^p = 1$,откуда $m - 2, n - 4$.

При $m = 0$ имеем $n = 3$.

Следовательно, $m = 2, n = 4$

Пример 4.21. (ЕГЭ, 2010) Решите уравнение в целых числах

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$

Подберем решение $x = 3, y = 11$ и докажем, что других решений нет.

Исходное уравнение (4.13) представим в виде

$$x(x+1)(x^2+1) = y^2 - 1. \qquad (4.22)$$

В левой части уравнения (4.22) стоит произведение двух последовательных чисел $x(x+1)$, которое всегда делится на 2. В случае, когда число y – четное , правая часть уравнения (4.22) не делится на число 2.

В случае, когда число y – нечетное, в правой части уравнения (4.22) стоит разность квадратов нечетных чисел, которая всегда делится на 8, а выражение в левой части уравнения (4.22) не делится на 8 при $x > 3$.

Таким образом $x = 3; y = 11$.

Пример 4.22. (ЕГЭ, 2010) Решите в целых числах уравнение

$3^n + 8 = x^2$.

Подберем решение $n = 0$, $x = \pm 3$ и докажем, что других решений нет.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$x^2 - 3^n + 6 + 2 - 3q + 2 \qquad (4.23)$$

Докажем , что квадрат целого числа не может равняться числу $3q + 2$.

Отметим, что квадрат целого числа k при делении на 3 дает остаток, равный 0 или 1. Действительно, всякое целое число можно с учетом делимости на 3 записать в виде $k = 3t + r,$ где $r = 0,1,2.$ Тогда $k^2 = 9t^2 + 6tr + r^2$; числа k^2 и r^2 дают один и тот же остаток, поскольку $r^2 = 0,1,4$.

Остатки при делении числа k^2 на 3 будут равны 0 или 1. Следовательно, $k^2 = 3t$ или $k^2 = 3q + 1$ и квадрат целого числа не может равняться $3q + 2$.

Таким образом, $x = 3; n = 0,\quad x = -3; n = 0$

Пример 4.23. (ЕГЭ, 2010) Решите уравнение в натуральных числах $3^m + 4^n = 5^k$.

Левая и правая части уравнения (4.17) должны давать один и тот же остаток при делении на 3.

Докажем, что степени числа 5^k при делении на 3 дают остаток, равный 1, если число k - четное, и остаток, равный 2, если k нечетное.

Если число k четное, то $k - 2t$. Тогда $5^{2t} = (3 + 2)^{2t} = 3q + 2^{2t},$ а число 2 в четной степени дает при делении на 3 остаток, равный 1.

Действительно, можно представить число 2 в виде разности $2 = 3 - 1$, тогда $2^{2t} = (3 - 1)^{2t} = 3q_1 + 1$.

Если число k - нечетное, то $k = 2t + 1.$ Тогда $5^k = (3 + 2)^{2t+1} = 3s + 2^{2t+1},$ а число 2 в нечетной степени при делении на 3 дает остаток, равный 2..

Действительно, $2^{2t+1} = (3 - 1)^{2t+1} = 3s_1 + (-1)^{2t+1} = 3s_1 - 1 =$
$= 3s_1 + 2 - 3 = 3(s_1 - 1) + 2.$

Левая часть уравнения (4.17) при делении на 3 дает остаток, равный 1, поэтому, используя доказанное утверждение, получим, что число k должно быть четным.

Перепишем уравнение (4.17) в виде

$$3^m = 5^k - 4^n \qquad (4.18)$$

Правая часть уравнения (4.18) делится на 4 с остатком, равным 1, поэтому стоящая в левой части уравнения (4.18) степень 3^m тоже должна давать при делении на 4 остаток, равный 1. Это возможно, когда число m четное. Поэтому $4^n = 5^k - 3^m = 5^{2k_0} - 3^{2m_0}$ или $2^{2n} = (5^{k_0} - 3^{m_0})(5^{k_0} + 3^{m_0})$.

Множители $5^{k_0} - 3^{m_0} = 2^p$ и $5^{k_0} + 3^{m_0} = 2^q$, где p и q целые неотрицательные числа и $p + q = 2n$. Причем, $5^{k_0} = \frac{1}{2}(2^p + 2^q)$ и

$3^{m_0} = \frac{1}{2}(2^p - 2^q) = 2^{p-1} - 2^{q-1}$.

Число $2^{p-1} - 2^{q-1}$ должно быть нечетным, потому что это число равно степени числа 3. Это выполняется только при $q = 1$. Поэтому:

$$3^{m_0} = 2^{p-1} - 1$$

Число $p - 1$ должно быть четным, чтобы правая часть уравнения (4.19) делилась на 3 или $p - 1 = 2s$. Тогда $3^{m_0} = (2^s - 1)(2^s + 1)$ - произведение двух множителей, отличающихся на 2 и являющихся степенями числа 3. Эти множители могут быть равны только 1 и 3. Тогда $s = 1$, $2s + 1 = 3$.

Таким образом $m = n = k = 2$.

4.2.Окончание частей уравнения на одну и ту же цифру.

Основной принцип решения заключается в следующем: левая и правая части уравнения в целых числах должны оканчиваться на одну и ту же цифру.

Пример 4.24. Решить в целых числах уравнение: $x^2 = 5y^2 + 3$

Очевидно, что число $5y^2$ оканчивается на 0 либо на 5, а число $5y^2 + 3$ соответственно оканчивается на 3 либо на 8. Нетрудно убедиться, что x^2 может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, левая и правая части исходного уравнения оканчиваются на разные цифры. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

4.4. Метод оценки.

Основной принцип преобразования уравнения в целых числах в уравнение с очевидной оценкой. В большинстве случаев уравнение сводится к неотрицательному выражению.

Пример 4.25. Решить в целых числах уравнение:

$5x^4 - 40x^2 + 2y^6 - 32y^3 = -208$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0.$$

Используя формулы сокращенного умножения, получим:

$$5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0.$$

Так как $5(x^2 - 4)^2 \geq 0$ и $2(y^3 - 8)^2 \geq 0,$ то решение возможно лишь при $5(x^2 - 4)^2 = 0$ и $2(y^3 - 8)^2 = 0$, что соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0; \\ y^3 - 8 = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $x = \pm 2\,; y = 2$.

4.5. Решение квадратного уравнения относительно одной из переменных.

Пример 4.26. Решить в натуральных числах квадратное уравнение:

$2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

Решим квадратное уравнение относительно переменной k:

$$2k^2 + (7 - 2m)k - 3m - 36 = 0;$$

$$D = 49 - 28m + 4m^2 + 24m + 288 = 4m^2 - 4m + 337;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2m - 7 \pm \sqrt{4m^2 - 4m + 337}}{4},$$

Так как, k и $2m$-7 — целые числа (k и m - натуральные по условию), то $\sqrt{4m^2 - 4m + 337}$ — является целым числом.

Пусть $L = \sqrt{4m^2 - 4m + 337}$, L >0; L — целое число. Тогда

$$L^2 = 4m^2 - 4m + 337.$$

Решим квадратное уравнение (4.19) относительно m:

$4m^2 - 4m + 337 - L^2 = 0;$

$D = 4 + 4L^2 - 1348 = 4L^2 - 1344;$ $4m_1 = 2 + \sqrt{L^2 - 336};$

$4m_2 = 2 - \sqrt{L^2 - 336}.$

Так как $4m$ — натуральное число (m - натуральное по условию) , то

$\sqrt{L^2 - 336}$ — является целым числом.

Пусть $N = \sqrt{L^2 - 336}$), N >0; N — целое число. Тогда число $N^2 = L^2 - 336$,

Откуда следует, что (L - N)(L + N)=336.

Решаем это уравнение в натуральных числах (метод изложен в примере 4.1).

Получим $L = 25; N = 17$ и k = 9 ,m =9

Глава 5. Задачи с факториалами.

Пример 5.1. Решить в натуральных числах уравнение:

$n! + 4n - 9 = k^2$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$n! + 4n = k^2 + 9$$

Правая часть уравнения (5.2) представляет собой сумму квадратов двух чисел (одно из них - нечетное число 3^2), которая при делении на 4 дает остатки, равные 1 или 2. Левая часть уравнения (5.2) делится на 4 при $n \geq 4$.

Следовательно, уравнение (5.1) при $n \geq 4$ решений не имеет.

Рассматривая натуральные числа $n < 4$, получим решения:

$n = 2, k = 1$ и $n = 3; k = 3$

Пример 5.2. Решить в натуральных числах уравнение $n! - 3n + 29 = k^2$

Перепишем исходное уравнение в виде

$$n! - 3n + 30 = k^2 + 1.$$

Левая часть полученного уравнения делится на 3, а правая часть дает остаток, равный 1 и 2. Таким образом, $n - 3, k - 5$

***Пример* 5.3.** Решить в целых числах уравнение $12 \cdot n! + 11^n + 2 = k^2$.

При $n \geq 5$ факториал $n!$ оканчивается на 0, а любая степень числа 11 - оканчивается на 1.

Получаем, таким образом, что левая часть исходного уравнения оканчивается на 3, что невозможно, так как в правой его части стоит квадрат целого числа. Рассмотрим $n < 5$:

при $n = 1$ левая часть исходного уравнения равна 25,

при $n = 2$ - равна 147,

при $n = 3$ - равна 1405;

при $n = 4$ - равна 14931.

Следовательно, $n = 1, k = \pm 5$

***Пример* 5.4.** Решить в целых числах уравнение $n! + 6^n + 11 = k^2$.

Решение примера получаем аналогично решению примера 5.2. Следовательно, $n = 2, k = \pm 7$

***Пример* 5.5.** (ЕГЭ 2010) Решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$.

При $n \geq 5,$ факториал $n!$ оканчивается на 0, поэтому левая часть исходного уравнения может оканчиваться на 3 или на 8. Однако на эти цифры не может оканчиваться квадрат натурального числа k^2. Переберем значения числа n $(n < 5)$. Получим ответ: $n = 2, k = 5$

***Пример* 5.6.** (Московская математическая регата, 2003/2004,11-й класс)

Найдите все натуральные значения n, для которых выполняется равенство: $n^3 - n = n!$.

Запишем исходное уравнение в виде

$$n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1. \qquad (5.1)$$

Так как $n = 1$ не является решением исходного уравнения, то разделим обе части уравнения (5.3) на $n(n-1)$. Получим, что

$$(n+1) = (n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1. \qquad (5.2)$$

Подставвив последовательные натуральные значения n, начиная с $n = 2$, в уравнение (5.2) , получим, что решением уравнения является $n = 5$.

Так как для всех $n > 5$ выполняется неравенство $n + 1 < 2n - 4 = 2(n-2)$, то с учетом уравнения (5.4) $n + 1 < (n-2)2 < (n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1$, поэтому других натуральных решений исходное уравнение не имеет.

Следовательно, исходное уравнение имеет одно решение $n = 5$.

Пример 5.7. (Московская математическая регата, 2001/2002,10-й класс).Найдите две последние цифры в десятичной записи числа: 1!+2!+…+2001!+2002!.

Факториал $n!$, начиная с $n = 5$ оканчивается на 0, а начиная с $n = 10$ двумя нулями. Поэтому, две последние цифры искомого числа совпадают с двумя последними цифрами суммы первых девяти членов последовательности: 1+2+6+24+120+720+5040+40320+362880 = 409113.

Таким образом, последние цифры - это 1 и 3.

Пример 5.8. (Московская математическая регата, 2009/2010,11-й класс).

Найдите все натуральные решения уравнения $n^2 + 2n - n! = 0$.

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$(n+2)n = n! \ \text{ или } (n-1)! = n + 2. \qquad (5.3)$$

При $n > 4$ решений уравнения (5.5) нет, так как $(n-1)! > 2(n-1) > n + 2$. Подставляя $n = 1, 2, 3, 4$ в уравнение (5.5), получаем, что решением исходного уравнения будет $n = 4$.

Пример 5.9. (Московская математическая регата, 2005/2006,9-класс).

На какую наибольшую степень числа 3 может делиться сумма вида 1!+2!+3!+…$+n!$?

Обозначим 1!+2!+3!+…$+n! = S_n$

Тогда $S_1 = 1$; $S_2 = 3$; $S_3 = 9$; $S_4 = 33$; $S_5 = 153$; $S_6 = 873$; $S_7 = 5813$; $S_8 = 46233$.

На число 3^3 делится только S_7. При $k \geq 9$ число $k!$ делится на число 27. Тогда при $n \geq 9$ сумма $S_n = S_7 + 8! + 9! + 10! + \cdots + n!$, где слагаемое 81 не делится на 27, а остальные делятся, поэтому эта сумма не делится на 27.

Получаем ответ $3^3 = 27$.

Пример 5.10. (Московская математическая регата, 2002/2003,9 класс).

Укажите все натуральные значения n , такие, что $(n-1)!$ делится на n.

Никакое простое число решением являться не может, так как число $(n-1)!$ не содержит простой множитель n.

Пусть n – составное число, большее 5, тогда $n = ab$, где $a \neq b, a \neq 1, b \neq 1$, или $n = p^2$, где p простое число.

В первом случае число $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)$ содержит сомножители a и b, значит, число $(n-1)!$ делится на n. Во втором случае, если $n > 5$, то число $(n-1)!$ содержит сомножители p и $2p$,(так как $2p < p^2 = n$), то есть, число $(n-1)!$ делится на n. Остается проверить число 4 – единственное составное, меньшее 5: оно не является решением, так как число 3! = 6 не делится на 4.

Таким образом, все составные числа, большие 5, делятся на n.

Литература

1.Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В.

Конкурсные задачи, основанные на теории чисел.

Издание 3-е, исправленное и дополненное.

-М.,ООО «Макс Пресс», 2005 -180 стр.

2.Хорошилова Е.В.

Элементарная математика:

Учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов.

Часть 1: Теория чисел. Алгебра. - М.:Изд-во Моск.ун-та, 2010.– 472 с.

3.Дэвенпорт Гарольд

Высшая арифметика: Введение в теорию чисел.

Пер. с англ./ Под ред. Ю.В.Линника.

Изд.2-е. – М.:Книжный дом «Либроком», 2010. – 176 с.

4.Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.

Избранные задачи и теоремы элементарной математики.

Арифметика и алгебра. – 6-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 480 с.-

ISBN 5-9221-0106-4.

5.Буфеев С.В.

Коллекция задач по арифметике целых чисел.

Задания С6 ЕГЭ: Учебное пособие. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. – 344 с.:ил.

6.Корянов А.Г.

Математика. Уравнения и неравенства в целых числах.

http://alexlarin.narod.ru/

7.А.П. Власова, Н.В. Евсеева, Н.И. Латанова и др.

Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. – М.:АСТ:Астрель, 2010 – 318 с.

Приложение 1.Решение задач на нелинейные уравнения в целых числах.

Пример П1.1. (ЕГЭ, 2010г.) Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря двумя способами: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем, число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом случае автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа *B* входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа *A*? Пусть в автобус типа *B* входит k человек, а в автобус типа *A* - $k+7$ человек и каждый из автобусов типа *B* сделает m рейсов, а каждый из автобусов типа *A* - $m+1$ рейсов. Так как в обоих случаях автобусы перевезут одно и то же количество школьников, получаем уравнение:

$$3km = 2(k+7)(m+1)$$

или

$$km = 14m + 2k + 14,$$

откуда

$$(m-2)(k-14) = 42.$$

Делителями числа 42 являются числа 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Перебор всех делителей дает восемь систем уравнений, решая которые получим возможные решения для чисел k и m: (15,44), (16,23), (17,16), (20,9), (21,8), (28,5), (35,4), (56,3). Для каждой пары чисел находим количество перевозимых школьников, равное $3km$, а именно 1980, 1104, 816, 540, 420, 420, 504.

Следовательно, максимальное количество школьников, которое можно перевезти, составляет 1980 детей.

Пример П1.2. (ЕГЭ, 2010г.) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 шарика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

В первом случае в каждой коробке лежит по 3 пакетика, и таких коробок пусть будет x, а в каждом пакетике находится по n шариков. В другом случае коробок будет $x+2$, пакетиков в коробке 2, а шариков в пакетике $n+3$. Из условия примера получаем $3nx = 2(n+3)(x+2)$, откуда

$$n = \frac{6x+12}{x-4} = 6 + \frac{36}{x-4}.$$

Числа $x,\ n$ - натуральные, поэтому число 36 должно делиться на $x-4$. Перебирая делители числа 36 – 1, 2, 3, 6, 12, 18, 36 , получим решение $x = 40$, тогда $3nx = 840.$

Следовательно, наибольшее количество шариков равно 840.

Пример П1.3. (ЕГЭ, 2010г.) Шарики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки по 2 пакетика в одну коробку. Можно эти же шарики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 5 шариков меньше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 3 пакетика, а коробок потребуется на 2 меньше. Какое наибольшее количество шариков может быть при таких условиях?

В первом случае в каждой коробке лежит по 2 пакетика, и таких коробок пусть будет x, а в каждом пакетике находится по n шариков. Во втором случае коробок будет $x-2$, пакетиков в коробке 3, а шариков в пакетике $n-5.$

Из условия примера получаем $2nx = 3(n-5)(x-2),$ откуда

$$n = \frac{15x-30}{x-6} = 15 + \frac{60}{x-6}.$$

Числа $x,\ n$ - натуральные, поэтому число 60 должно делиться на $x-6.$

Перебирая делители числа 60 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30) получим решение $x = 36$, тогда $2nx = 1224.$

Следовательно, наибольшее количество шариков равно 1224.

Пример П1.4. (ЕГЭ, 2010г.) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 1000 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение числа $b.$

Пусть $a = (\alpha)^2,\ \ b = (\beta)^2,\ \ c = (\gamma)^2$, где $\alpha < \beta < \gamma.\ \alpha \geq 32.$

Допустим, что $\beta = \alpha + d$, где d - некоторое число, $d \in Z$. Из свойства арифметической прогрессии следует, что $2b = a| + c, 2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$ или $(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2$, откуда $(\alpha + \gamma + 2d)(\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$.

Обозначим $\alpha + \gamma + 2d = p, \alpha - \gamma + 2d = q$. Разность $p - q = 2\gamma$, а произведение $pq = 2d^2$, поэтому p и q - четные числа.

Тогда $p = 2n, q = 2m, d = 2t; n, m, t \in N$. Таким образом, получим:

$$\begin{cases} \alpha + 2d = \dfrac{p+q}{2} = m + n; \\ \gamma = \dfrac{p-q}{2} = n = m; \\ nm = 2t^2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha = n + m - 4t \geq 32 \\ \gamma = n - m \geq 34 \\ nm = 2t^2. \end{cases}$$

По условию примера надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Так как $m \geq 1, n \geq 35$, то $2t^2 = nm \geq 35$ и $t \geq 5$.

С учетом того, что $\beta = \alpha + 2t \geq 32 + 2t$ рассмотрим следующие случаи:

1)$t = 5$, тогда $nm = 50, n + m \geq 52, n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1$.

Отсюда $n = 50, m = 1$ и $\beta = 51 - 10 = 41$.

Так как $\beta \geq 32 + 2t$, то этот случай не подходит.

2) $t = 6$, тогда $nm = 72, n + m \geq 56, n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1$.

Отсюда $n = 72, m = 1$ и $\beta = 73 - 12 = 61$.

Если $n = 36, m = 2$, то $\beta = 38 - 12 = 36$..Число 36 не является решением, так как $\beta \geq 32 + 2t$.

3) $t = 7$, тогда $nm = 98, n + m \geq 60, n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1$.

Отсюда $n = 98, m = 1$ и $\beta = 99 - 14 = 85$.

Если $n = 49, m = 2$, то $\beta = 51 - 14 = 37$..Число 37 не является решением, так как $\beta \geq 32 + 2t$.

4) $t = 8$, тогда $nm = 128, n + m \geq 64, n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1$.

Отсюда, $n = 128, m = 1$ и $\beta = 129 - 16 = 113$.

Если $n = 64, m = 2$, то $\beta = 50$.Эти числа могут быть решениями.

5) $t = 9$, тогда $nm = 162, n + m \geq 68, n - m \geq 34, n \geq 35, m \geq 1$.

Отсюда, $n = 162, m = 1$ и $\beta = 163 - 118 = 145$.

Если $n = 81, m = 2,$ то $\beta = 65$.Эти числа могут быть решениями.

Следовательно, наименьшее значение числа $b = (\beta)^2 = (50)^2 = 2500$, при этом $a = (32)^2, c = (62)^2$.

Пример П1.5. (ЕГЭ, 2010г.) Натуральные числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причем все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное при указанных условиях значение числа b.

Пусть $a = (\alpha)^2,\ \ b = (\beta)^2,\ c = (\gamma)^2,$ где $\alpha < \beta < \gamma;\ \alpha \geq 23$. Допустим, что $\beta = \alpha + d,$ где d - некоторое число, $d \in Z$. По свойству арифметической прогрессии: $2b = a + c,\quad 2(\alpha + d)^2 = (\alpha)^2 + (\gamma)^2$ или

$(\alpha)^2 + 4\alpha d + 4d^2 - (\gamma)^2 = 2d^2,$ откуда $(\alpha + \gamma + 2d)(\alpha - \gamma + 2d) = 2d^2$.

Обозначим $\alpha + \gamma + 2d = p,\ \alpha - \gamma + 2d = q$. Разность $p - q = 2\gamma,$ а произведение $pq = 2d^2,$ поэтому p и q - числа четные.

Тогда $p = 2n,\ q = 2m; d = 2t;\ n, m \in Z, t \in N$.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} \alpha + 2d = \frac{p+q}{2} = m + n \\ \gamma = \frac{p-q}{2} = n - m \\ nm = 2t^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha = n + m - 4t \geq 23 \\ \gamma = n - m \geq 25 \\ nm = 2t^2 \end{cases}.$$

По условию примера надо найти наименьшее значение $\beta = n + m - 2t$. Так как $m \geq 1, n \geq 26$, то $2t^2 = nm \geq 26$ и $t \geq 4$.

С учетом того, что $\beta = \alpha + 2t \geq 23 + 2t$ рассмотрим следующие случаи:

1) $t = 4,$ тогда $nm = 32,\ n + m \geq 39; n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1$.

Отсюда $n = 32, m = 1, \beta = 33 - 8 = 25$. Число 25 не подходит, так как $\beta \geq 31;$

2) $t = 5$. Тогда $nm = 50,\ n + m \geq 43, n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1$.

Отсюда $n = 50, m = 1,\ \beta = 41$. Это число может стать решением.

3) $t = 6$. Тогда $nm = 72,\ n + m \geq 47, n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1$.

Отсюда $\beta = 61$. Это число может стать решением.

4) $t = 7$. Тогда $nm = 98,\ n + m \geq 51, n - m \geq 25,\ n \geq 26,\ m \geq 1$

Отсюда $n = 98, m = 1$ и $\beta = 85$ или $n = 49, m = 2$ и $\beta = 37$.

Эти числа могут стать решением.

5) $t = 8$, тогда $\beta \geq 23 + 2t \geq 23 + 16 = 39$.

Следовательно, наименьшее значение числа $b = (\beta)^2 = (37)^2 = 1369$, при этом $a = 23^2; c = 47^2$.

Пример П1.6. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5,\ a_2 = 8, \ldots, a_N$ и $b_1 = 9,\ b_2 = 14, \ldots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Для арифметической прогрессии $a_m = 5 + 3(m - 1), m = 1, \ldots, N$ и $b_k = 9 + 5(k - 1), k = 1, \ldots, M$.

Согласно условию примера, общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 3(m - 1) - 9 + 5(k - 1)$, откуда

$$3m = 5k + 2. \qquad (П1.1)$$

Так как левая часть уравнения (П1.1) делится на 3, то правая часть тоже должна делиться на 3. При этом $k = 3t - 1$. Тогда $3m = 5(3t - 1) + 2$, то есть $3m = 15t - 3$, где $1 \leq t \leq L$, где L - количество совпадающих членов прогрессий.

Общие члены двух прогрессий сами составляют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 14, и разностью, равной 15,в сумме всех членов этой прогрессии, равной 815.

Следовательно, используя формулу суммы L членов арифметической прогрессии, получим: $815 = \frac{(28 + 15(L-1))L}{2}$ или $15L^2 + 13L - 1630 = 0$. Из этого уравнения находим $L = 10$.

Подставляя вместо t $L = 10$, получим число членов арифметической прогрессии $N = 5L - 1 = 49$ и $M = 3L - 1 = 29$.

Пример П1.7. Решить в целых числах уравнение $x^3-2y^3-4z^3=0$

Запишем исходное уравнение в виде:

$$x^3-2y^3-4z^3=0,$$

где x,y,z —целые числа. Так как правая часть этого уравнения делится на 2 , то число x - четное. После замены $x=2x_1$ получаем уравнение

$8(x_1)^3-2y^3-4z^3=0$. Разделим это уравнение почленно на 2 и получим

$$4(x_1)^3-y^3-2z^3=0.$$

Следовательно, и число y - четное.

После замены $y=2y_1$ получаем уравнение $4{x_1}^3-8{y_1}^3-2z^3=0$. Разделим это уравнение почленно на 2 и получим $2{x_1}^3-4{y_1}^3-z^3=0.$

Следовательно, z - четное.

После замены $z=2z_1$ получаем уравнение $2{x_1}^3-4{y_1}^3-8{z_1}^3=0.$ Разделим это уравнение почленно на 2 и получим уравнение:

$2x_1^3-2y_1^3-4z_1^3=0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение. Выполняя действия, аналогичные изложенным выше, приходим к выводу, что числа x_1,y_1,z_1 так же четные и т. д. Но это возможно лишь в случае, когда

$x=y=z=0.$

Пример П1.8. (ЕГЭ, 2010) Решить в целых числах уравнение $2x^2-2xy+9x+y=2.$

Преобразуем уравнение: $y(2x-1)=2x^2+9x-2$.

Так как x – целое число, то число $2x-1$ не равно 0, поэтому выразим y через x:

$$y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}.$$

Поскольку x и y — целые числа, то $\frac{3}{2x-1}$ тоже целое число. Следовательно, число $2x-1$ является делителем числа 3.

В результате получим: 1) если $2x-1=1$, то $x=1$; 2) если $2x-1=-1$, то $x=0$; 3) если $2x-1=3$, то $x=2$; 4) если

$2x-1=-3$, то $x=-1$.

Для каждого значения x найдем y и получим ответ: (1;9),(2;8),(0;2),(-1;3).

Пример 1.9. (ЕГЭ, 2010) Решите в целых числах уравнение:

$1+2^k+2^{2k+1}=n^2$.

При $k=1$ получаем уравнение $n^2=11$, которое не имеет решений в целых числах.

При $k=0$ получаем уравнение $n^2=4$, откуда $n=\pm 2$.

При $k=-1$ уравнение не имеет решений в целых числах.

При $k<-1$ уравнение не имеет решений в целых числах, так как левая часть данного уравнения принимает значения из промежутка $(1;2)$.

Рассмотрим случай $k\geq 2$. Четные степени числа 2 при делении на 3 дают остаток, равный 1, нечетные степени числа 2 дают остаток, равный 2. Отсюда следует, что число $1+2^{2k+1}$ делится на 3 без остатка, а число $1+2^k+2^{2k+1}$ при делении на 3 дает такой же остаток, как и число 2^k. С другой стороны, квадраты целых чисел не могут давать при делении на 3 остаток, равный 2. Таким образом, число k - четное. Положим $k=2d$, $d\in N$ и запишем исходное уравнение в виде $1+4^d+2*4^{2d}=n^2$, отсюда следует, что n - нечетное число или $n=2x+1, x\in N$.

Тогда получаем уравнение

$$1+4^d+2*4^{2d}=4x^2+4x+1 \qquad (П1.2)$$

Преобразуем уравнение (П1.2) к виду

$$4^d(1 + 2 * 4^d) = 4(x^2 + x).$$

Обозначив $y = d - 1, y > 0$ получим следующее уравнение:

$$4^y(1 + 8 * 4^y) = x(1 + x). \qquad \text{(П1.3)}$$

Уравнение (П1.3) не имеет решений.

Одно из чисел x и $1 + x$ - четное, и оно делится на 4^y.

Представим x в виде $x = m4^y$ (m - нечетное число, $m \in \mathbb{N}$). Тогда

$$4^y(1 + 8 \cdot 4^y) = m \cdot 4^y(m4^y + 1)$$

или

$$1 + 8 \cdot 4^y = m^2 4^y + m.$$

Следовательно,

$$(8 - m^2)4^y = m - 1. \qquad \text{(П1.4)}$$

Сравнивая знаки левой и правой частей уравнения (5.4), получаем лишь одно нечетное число $m = 1,$ которое не является решением.

Пусть $x + 1 = m \cdot 4^y$ (m – нечетное число, $m \in N$). Тогда

$$4^y(1 + 8 \cdot 4^y) = (m \cdot 4^y - 1)m \cdot 4^y$$

или $1 + 8 \cdot 4^y = m^2 4^y - m.$

Следовательно,

$(m^2 - 8)4^y = m + 1,$

где выражение $m^2 - 8$ неотрицательное при натуральных числах $m \geq 3.$ Если $m = 3,$ то $y = 1$ (что приводит к решению исходного уравнения $k = 4; n = \pm 23$). При натуральных числах $m \geq 4$ выполняется неравенство $m^2 - 8 > m + 1.$ Отсюда следует, что при этих значениях m решений нет.

Таким образом, $k = 0; n = \pm 2$ **или** $k = 4; n = \pm 23.$

Пример П1.10. (МГУ, геологический факультет, 2003) Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 21 больше, чем число k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

Пусть q - знаменатель геометрической прогрессии, тогда ее члены равны соответственно: $k,\ n - kq;\ \ m - kq^2;\ k, q \in Z.$ Из условия примера следует, что $m - k = 21,$ тогда $k(q^2 - 1) = 21.$

Делителями числа 21 являются числа $\pm1, \pm3, \pm7, \pm21.$ Так как числа $q^2 - 1$ – целое и $q^2 \geq 0,$ то $q^2 - 1 \geq -1.$

Поэтому из делителей числа 21 подходят только положительные числа.

Рассмотрим различные варианты систем уравнений:

$$\begin{cases} k = 1 \\ q^2 - 1 = 21 \end{cases};\quad \begin{cases} k = 21 \\ q^2 - 1 = 1 \end{cases};\quad \begin{cases} k = 3 \\ q^2 - 1 = 7 \end{cases};\quad \begin{cases} k = 7 \\ q^2 - 1 = 3 \end{cases}.$$

Из этих систем целочисленное решение получается только у четвертой системы, когда $k = 7; q^2 = 4;\ \ q = \pm2.$

Но при положительном целом знаменателе $q = 2$ прогрессия будет возрастающей, поэтому $k = 7;\ \ q = -2.$ Тогда $n = -14;\ \ m = 28$ и следовательно, $k + n + m = 21.$

Пример П1.11. (МГУ, Черноморский филиал, 2003) Для всех значений параметра $b \in (2; 4)$ найдите все целые числа x и $y,$ удовлетворяющие равенству $x^2 - 3xy + 2y^2 = b.$

Из условия примера следует, что b - целое число и равное 3. Разложив левую часть исходного уравнения на множители, получим $(x - 2y)(x - y) = 3.$ Таким образом это уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases};\quad \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases};\quad \begin{cases} x - 2y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

Решения этих систем следующие $(5; 2), (-1; -2), (-5; -2), (1; 2).$

Пример П1.12. (ЕГЭ, 2010) Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x - 1$ являются простыми числами.

Найдите значения параметра a, b и корни трехчлена $f(x).$

Обозначим $3a + 10 = p,\ 5b - 14 = q$. Тогда значение трехчлена при $x = 1$ равно $f(1) = 1 + p + q$. Пусть x_1 и x_2 - корни трехчлена, причем $x_1 < x_2$. По теореме Виета $x_1 * x_2 = q, x_2 + x_1 = -p$.

Запишем выражение $f(1)$ в виде $f(1) - 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$ и преобразуем его, разложив правую часть на множители:

$f(1) = 1 - x_1 + x_2(x_1 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Так как $f(1),\ x_1, x_2$ по условию примера являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ - натуральные и меньшее из них должно быть равным 1. Следовательно, $x_1 - 1$ =1, откуда $x_1 = 2$. Тогда $f(1) = x_2 - 1$, то есть $x_2 - 1 \quad -1$ и x_2 - два последовательных простых числа, что возможно только, если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2 = 3$, поэтому $p = 3a + 10 = -5,\ q = 5b - 14 = 6$. Из двух последних равенств находим $a = -5, b = 4$.

Пример П1.13. (ЕГЭ, 2010) Найдите все такие целые числа a и b, что корни уравнения $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ - простыми числами.

Обозначим корни квадратного уравнения x_1 и x_2. По теореме Виета x_1x_2= $3b + 5$ - простое число. Если $x_1 = \pm 1$, то $x_2 = \pm(3b + 5)$. Тогда $2a + 9 = \pm(3b + 6) = \pm 3(b + 2)$.

Так как $2a + 9$ - простое число, то $2a + 9 = 3$ и $a = -3$. Тогда $b + 2 = 1$ и $b = -1$.

Таким образом $a = -5, b = 4$

Пример 1.14. (ЕГЭ, 2010) Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких что $k < n$ и $(n)^k = (k)^n$.

Прологарифмируем исходное уравнение, тогда $k \ln n = n \ln k$ или $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, где $x > 0$. Производная этой функции равна $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

Так как $f'(x) \le 0$ при $x \ge e$ и $f'(x) \ge 0$ при $0 < x \le e$, то

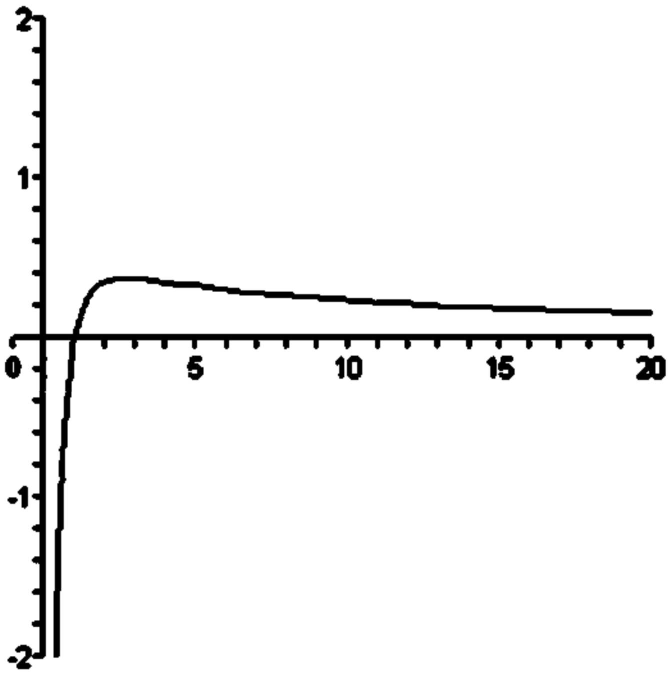

рис. П1.1

функция $f(x)$ возрастает на $(0;e]$ и убывает на $[e;\infty)$. График функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ представлен на рисунке

Поскольку $k < n$, равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$.

Отсюда следует, что $k = 1$ или $k = 2$, причем для каждого числа k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего исходному уравнению. Если $k = 1$, то получаем $n = 1$. Но по условию задачи $k < n$. Если $k = 2$, то получаем, $(n)^2 = (2)^n$ и находим решение $n = 4$.

Следовательно, $k = 2$

Пример П1.15. (ЕГЭ, 2010) Найдите все пары натуральных чисел k и n, таких что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$

Исходное уравнение приводим к виду $(n)^k = (k)^n$. Таким образом, мы получаем условие примера 1.14.

Следовательно, $k = 2,\ n = 4$

Пример 1.16. (ЕГЭ, 10 класс, 2010)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y = \frac{x^2-2x+a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число. Исходная функция определена и непрерывна для всех действительных x.

Выделим целую часть функции: $y - 1 - \frac{2x+6-a}{6+x^2}$.

Отсюда следует, что для любого значения параметра a единица входит в множество значений y. Чтобы единица была ровно одним целым числом, необходимо условие $y \in (0;2)$. Таким образом получаем, что

$$0 < 1 - \frac{2x+6-a}{6+x^2} < 2 \text{ или} \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0 \end{cases}.$$

Поскольку эти неравенства должны выполняться при всех значениях x

Параметр a находим из решения следующей системы:

$$\begin{cases} 1 - a < 0; \\ 1 - 12 + a < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $1 < a < 11$.

Пример П1.17. (ЕГЭ, 2010)

Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166; \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

Выделяя полные квадраты, получим систему:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15; \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21. \\ x, y \in Z \end{cases}$$

Из первого неравенства системы следует, что $(x-9)^2 < 15$. Поэтому значения x, удовлетворяющие последнему неравенству, могут быть равны

$8{,}10{,}11{,}7{,}6{,}12$ или $6 \le x \le 12$.

Аналогично из второго неравенства системы получаем

$(x-16)^2 < 21$, $(x = 15{,}17{,}18{,}14{,}13{,}19{,}12{,}20)$ или $12 \le x \le 20$, откуда

$x = 12$.

Подставляя значение $x = 12$ в систему, получаем систему

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6; \\ (y+6)^2 < 5; \\ y \in Z. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы следует , что значение y, удовлетворяющее этому неравенству, может быть равно -7 и -8.

Из второго неравенства получаем возможные значения y, $\text{равные} -5, -8;$ откуда следует, что $y = -8$.

Таким образом $x = -12; y = -8$

Пример П1.18. (ЕГЭ, 2010) Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ x + 2y < \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Выделим полные квадраты:

$$\begin{cases} (x+6)^2 + (y-7)^2 < \dfrac{3}{2}; \\ x + 2y < \dfrac{15}{2}; \\ x, y \in Z. \end{cases}$$

Оба слагаемых первого неравенства могут быть равны 0 или одно из них равно 0, а второе равно 1. Подбираем возможные решения:

$(-6;7), (-5;7), (-7;7), (-6;6), (-6;8)$.

С учетом второго неравенства, получаем решение: $(-7;7), (-6;6)$.

Приложение 2.Задачи, предлагаемые на математических олимпиадах в различных Вузах.

Пример П2.1. (Государственный университет управления ГУУ)

Найдите все значения решения параметра a, при которых среди решений неравенства

$$2|x-7+a| - |2x-a-5| + 3|3-a| \leq 0 \qquad \text{(П2.1)}$$

имеется ровно два натуральных числа.

На рисунке П2.1 представлено множество решений неравенства на плоскости $(a0x)$. Оно обозначено штриховкой. Два натуральных числа $x = 1$ и $x = 2$ являются решениями неравенства (П2.1) при $a \in (4;5]$

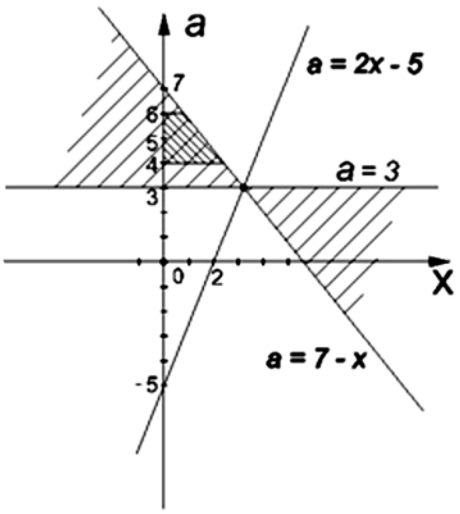

рис. П2.1

Пример П 2.2. (Олимпиада МАДИ) Найдите максимальное натуральное n, при котором число $13n^2 + 14n + 13$ делится на $n - 15$ без остатка.

Преобразуем исходное выражение: $13n^2 + 14n + 13 - 13n + 209 + \frac{3148}{n-15}$.

Откуда следует, что $n - 15 = 3148\ h\ n = 3163$.

Пример П2.3.При каком наибольшем целом значении параметра a графики функций $f(x) = x^3 - 6x - 10$ и $g(x) = ax + 6$ имеют наименьшее число общих точек. (Олимпиада МАДИ)

График функции $g(x) = ax + 6$ представляет собой прямую, проходящую через точку с координатами (0;6). График функции $f(x) = x^3 - 6x - 10$ приведен на рисунке П2.2.

При $a = 0$ прямая $g(x)$ параллельна оси Ox и пересекает график функции $f(x)$в одной точке. При увеличении значения параметра a прямая $y = g(x)$ поворачивается против часовой стрелки. При этом общая точка обоих графиков единственная до тех пор , пока прямая $g(x) = ax + 6$ не будет касаться графика функции $y = f(x)$. В этом случае графики имеют две общие точки. Определим значение параметра a , при котором прямая $g(x) = ax + 6$ является касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 6x - 10$.

Для этого напишем уравнение касательной к функции $f(x)$ в точке с абсциссой, равной x_0:

$$y = x_0^3 - 6x_0 - 10 + (3x_0^2 - 6)(x - x_0) \qquad (1)$$

Преобразуем уравнение (1):

$$y = (3x_0^2 - 6)x - 2x_0^3 - 10 \qquad (2)$$

Эта касательная совпадает с графиком $g(x) = ax + 6$, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} (3x_0^2 - 6) = a & (3) \\ -2x_0^3 - 10 = 6 & (4) \end{cases}$$

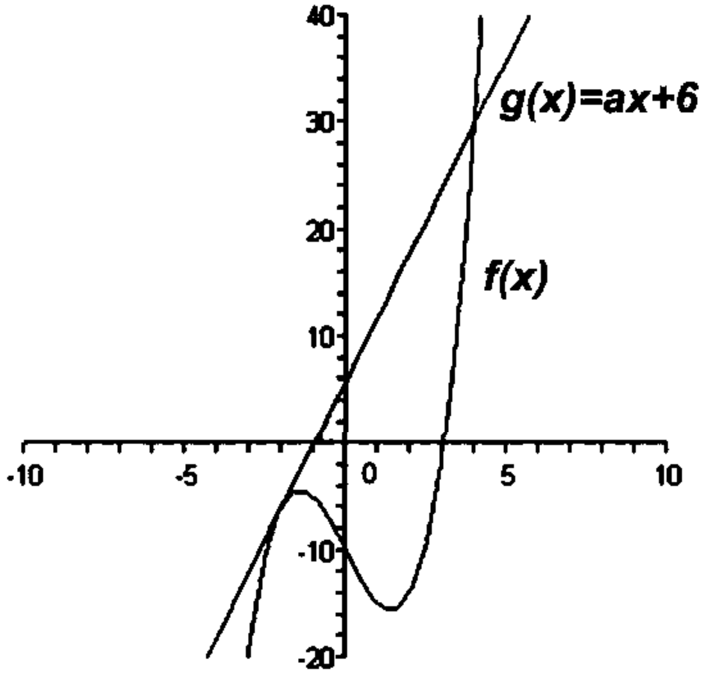

рис. П2.2

Решение уравнения (4): $x_0 - 2$ (5)

Подставляя выражение (5) в уравнение (3), получим, что $a = 6$.

Таким образом, при $a = 6$ графики исходных функций имеют две общие точки, а при $a < 6$ - единственную точку.

По условию задачи необходимо выбрать наибольшее целое значение параметра a, при котором графики приведенных функций имеют наименьшее число общих точек. Как указано выше наименьшее число общих точек, равное одному, достигается при $a < 6$. Следовательно, наибольшее целое значение параметра $a = 5$.

Пример П2.4. (Олимпиада МИФИ)

Разность цифр двузначного натурального числа А равна 4, а сумма квадратов цифр этого числа больше произведения его цифр на 37. Найдите число А.

Пусть a и $a + 4$ - цифры двузначного числа А. Тогда

$a^2 + (a+4)^2 = a(a+4) + 37$, откуда $a^2 + 4a - 21 = 0$ и $a = 3$.

Таким образом, А=37 или А=73.

Пример П2.5. (Олимпиада МИФИ) Двузначное число больше квадрата цифры единиц на 4. Если исходное число разделить на цифру его десятков, то в частном получится число 11, а в остатке - 2. Найдите исходное число.

Пусть a – цифра десятков, а b – цифра единиц. Согласно условию задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a10 + b = b^2 + 4 \\ a10 + b = 11a + 2 \end{cases}.$$

Решением этой системы являются $a = 6, b = 8$ и $a = 1, b = 3$

Таким образом, двузначное число равно 68 или 13

Пример П2.6. .(Олимпиада МТУСИ) Докажите, что выражение 1994·1995·1996·1997+1 является квадратом целого числа.

Обозначим $n = 1994$, тогда $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 =$

$$= \big(n(n+3)\big)\big((n+1)(n+2)\big)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 =$$
$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 =$$

$(n^2+3n+1)^2$, что и требовалось доказать.

Пример П2.7.Найдите целочисленное решение системы неравенств:

$$\begin{cases} y^2 + 2y \le x + 7 \\ x + 4y + 4 \le 0 \\ x + 7y + 5 \ge 0 \end{cases}$$

На рисунке П2.3 в координатах (xOy) представлено решение системы неравенств. Таким образом, решением являются две точки с координатами (-5;0), (-4;0).

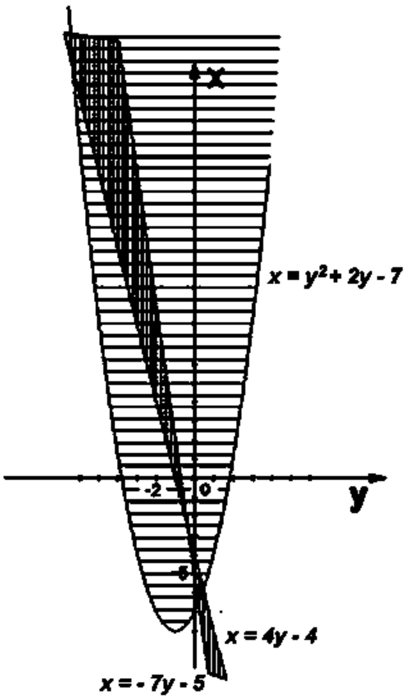

рис. П2.3

Пример П2.8. (Олимпиада, Российский Государственный Университет нефти и газа им. И.М. Губкина)

Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$\log_{x-156} 7 > \log_x 49$. Переходя к основанию, равному e, получаем неравенство:

$\log_{x-156} 7 > \log_x 49$, которое равносильно системе $\begin{cases} x > 156 \\ x \neq 157 \\ \frac{\ln 7}{\ln(x-156)} - \frac{2\ln 7}{\ln x} > 0 \end{cases}$.

Перейдем к совокупности двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \ln x > \ln(x-156)^2; \\ \ln(x-156) > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \ln x < \ln(x-156)^2; \\ \ln(x-156) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

или $\left[\begin{array}{l} x \in (157; 169) \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$.

Число целых чисел, входящих в промежуток $(157; 169)$ равно 11.

Пример П2.9. (Олимпиада, Санкт-Петербурский государственный технический университет)

Сколько целых чисел содержится в арифметической прогрессии длиной

$n = 100$, если известно, что ее первый член $a_1 = \frac{1}{7}$, а ее разность $d = \frac{2}{7}$?

Вычислим $a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{199}{7}$ при $n = 100$.

Целые значения принимают члены прогрессии с номерами

$n = 4,\ n = 11, n = 18, n = 25$ и так далее через каждые 7 номеров.

Всего таких членов для $n < 100$ получится 14.

Пример П2.10. (Олимпиада, Санкт-Петербурский государственный технический университет) При каких целых значениях n неравенство

$nx^2 - 2nx - 2 < 0$ выполняется для всех действительных x?

Из условия задачи следует, что при $n \le 0$, дискриминант квадратного трехчлена должен быть отрицательным: $n^2 + 2n < 0$.

Отсюда получаем ответ $\{0, -1\}$.

Пример П2.11. (Олимпиада, Саратовский Государственный Университет) Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $\frac{8}{3}$, а, кроме того, разность между искомым числом и числом, записанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

Пусть a – цифра десятков и b – цифра единиц.

Тогда из условия задачи следует система: $\begin{cases} a10 + b = \frac{8}{3}ab \\ (a10 + b) - (b10 + a) = 18 \end{cases}$, из которой $8b^2 - 17b - 60 = 0$ и $b = 4, a = 6$

Таким образом, искомое число равно 64.

Пример 2.12. (Олимпиада МФТИ) Найдите все пары целых чисел x и y, при которых является верным равенство $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

Перепишем исходное равенство и выделим целую часть:

$$y = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 7}{x-3} = \frac{x^2(x-3) - 3x(x-3) + 4(x-3) + 19}{x-3} = x^2 - 3x + 4 + \frac{19}{x-3}.$$

Так как число y является целым , то дробь $\frac{19}{x-3}$ должна быть целым числом.

Тогда $x - 3 = 1$ либо $x - 3 = -1$ **либо** $x - 3$=19 либо $x - 3 = -19$.

Отсюда находим $x = 4, y = 27$ или $x = 2, y = -17$ или $x = 22, y = 423$ или $x = -16, y = 307;$

Таким образом, ответом являются следующие пары чисел:

$\{(4;27),(2;-17),(22;423),(-16;307)\}$

Пример П2.13. (Олимпиада МГУ, географический факультет)

Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $5y = 2x^2 - 7x + 3,$ и докажите, что для каждой такой пары разность $x^2 - y^2$ является нечетным числом.

Исходное уравнение имеет решение, когда правая его часть делится на 5.

Пусть $x = 5t + r$, где остаток $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Вычислим правую часть исходного уравнения для указанных значений r.

Если $r = 3$, то правая часть исходного уравнения делится на 5.

Тогда $x = 5t + r$ и $y = 10t^2 + 5t$

Если x – нечетное число, то число $y = \frac{(2x^2 - 7x + 3)}{5}$ - будет четным, и наоборот, если число x - четное, то число y – нечетное. То есть, x и y - числа разной четности, поэтому $x^2 - y^2$ является нечетным числом.

Следовательно, ответом будет пара $(5t + 3; 10t^2 + 5t), t \in Z$

Пример П2.14. (Олимпиада МФТИ)

Найдите все пары целых чисел x и y, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 3y - 2x < 45; & (1) \\ x + y > 24; & (2) \\ 3x - y < 3. & (3) \end{cases}$$

Умножая неравенство (3) на 3 и складывая его с неравенством (1) получим, что $x < \frac{54}{7}$.

Перепишем неравенство (2) , как $-3x - 3y < -72.$ (4)

Складывая неравенство (4) с неравенством (1), получаем $-5x < -27, x > \frac{27}{5}$.

Следовательно, $5 < x \le 7$ или $x = 6, x \le 7$.

Условию исходной системы удовлетворяют $x = 6, y = 19$.

Пример П2.15. (Олимпиада МФТИ) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем второе уравнение исходной системы к виду

$(x-2)^2 + (y-1)^2 - 1$, откуда следует, что $\begin{cases} (x-2)^2 \le 1 \\ (y-1)^2 \le 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} |x-2| \le 1 \\ |y-1| \le 1 \end{cases}$.

Решением этой системы являются числа $x = 1,2,3;\ y = 0,1,2$.

Из них исходной системе удовлетворяют только пары чисел (2;0) и (2;2).

Пример П2.16. (МГУ, механико-математический факультет, 2003) Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Пусть d - разность исходной прогрессии и $a_1, a_2, \ldots \in Z, d \in Z$.

Согласно условия

$$|(a_8 + \cdots + a_{14}) - (a_1 + \cdots + a_7)| = |(a_8 - a_1) + (a_9 - a_2) + \cdots + (a_{14} - a_7)| = |7 \cdot 7d| = |49d| < 400$$

,

Откуда следует, что $|d| < \frac{400}{49} \le 8$.

По условию $S_6 - S_5 > 3$, то есть $a_6 > 3$ или $a_6 \ge 4$.

Так же $S_6 - S_7 > 3$, то есть $-a_7 > 3$ или $a_7 < -3$, $a_7 \le -4$.

Так как $d = a_7 - a_6$, то $d \ge -8$.

Тогда $a_6 = 4, a_7 = -4$ и $a_1 = a_6 - 5d = 44$. Но, как получено выше $|d| < 8$,

Следовательно $d = -8, a_1 = 44$.

Пример П2.17. (МГУ, факультет ВМК, устный экзамен)

Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9. Рассмотрим сумму

$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=$
$3n^3+6n=3n(n^2+2).$

Пусть $n=3t+r,$ где $r=0,1,2.$

Тогда $3n(n^2+2)=3(3t+r)(9t^2+6tr+r^2+2)=3(3q+r^3+2r),$

где $q=9t^3+9t^2r+3tr^2+2t.$

Подставляя различные значения для r , получаем, что число r^3+2r делится на число 3 для всех $r=0,1,2,$ что и требовалось доказать.

Пример П2.18.Каждое из целых чисел n, m, k не делится на 3. Доказать, что число $n^6+m^4+k^2$ делится на 3. (МГУ,ВМК, устный экзамен)

Известно, что квадрат целого числа при делении на 3 дает остаток, 1.

Если представить число $n=3t+r, где\ r=0,1,2,$ то $n^2=9t^2+6tr+r^2$ (1)

Выражение (1) при делении на 3 дает остаток r, равный 1 или 2

($r=1$ или $r=2$). А так как исходных чисел три и так как каждое дает в остатке 1, то сумма остатков равна 3, то есть число $n^6+m^4+k^2$ делится на 3.

Пример П2.19.Найдите все натуральные значения n , удовлетворяющие уравнению $2002[n\sqrt{1001^2+1}]=n[2002\sqrt{1001^2+1}],$ где $[x]$ - наибольшее целое число, не превосходящее числа x. (Олимпиада Ломоносов-2008)

Пусть $\sqrt{1001^2+1}$ =1001 + α. (1)

Тогда $0<\alpha=\sqrt{1001^2+1}$ -1001 = $\frac{1}{\sqrt{1001^2+1}+1001}<\frac{1}{2002}$

Так как $1001<\sqrt{1001^2+1}$ и 2002·1001< 2002·$\sqrt{1001^2+1}$.

2002·$\sqrt{1001^2+1}$ = 2002·1001+2002·α.

Как получено выше α$<\frac{1}{2002}$, то 2002·$\sqrt{1001^2+1}$< 2002·1001+1, то есть

$[2002\sqrt{1001^2+1}]=2002\cdot 1001.$

Поэтому исходное уравнение принимает вид:

$2002[n\sqrt{1001^2+1}]=2002\cdot 1001n$ или $[n\sqrt{1001^2+1}]=1001n.$

Это значит, что 1001n < $n\sqrt{1001^2+1}$ < $1001n+1$.

Отсюда $n < \frac{1}{\sqrt{1001^2+1}-1001}$, где $\frac{1}{\sqrt{1001^2+1}-1001} = \sqrt{1001^2+1} + 1001.$

Так как согласно (1) $\sqrt{1001^2+1}$ =1001 $+ \alpha$, то $\frac{1}{\sqrt{1001^2+1}-1001} = 2002 + \alpha.$

Следовательно, $n = 1,2,\dots,2002$.

Пример 2.20.Найти все натуральные числа $n, m, k, l,$ удовлетворяющие систе-ме уравнений: $\begin{cases} nm + kl = 13 \\ nk - ml = 6. \end{cases}$ (МГУ, ВМК, 2009)

После возведения в квадрат обеих частей уравнений получим, что

$$\begin{cases} n^2m^2 + 2nmkl + k^2l^2 = 169 \\ n^2k^2 - 2nmkl + m^2l^2 = 36 \end{cases}$$

Откуда $n^2m^2 + k^2l^2 + n^2k^2 + m^2l^2 = 205$ или $(m^2 + k^2)(n^2 + l^2) = 5 \cdot 41.$

Так как числа n, m, k, l - натуральные числа, то мы можем найти их значения, решив совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} m^2 + k^2 = 5; \\ n^2 + l^2 = 41. \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} m^2 + k^2 = 41; \\ n^2 + l^2 = 5. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Система (1) дает следующие решения:

$$\begin{cases} k = 1 \\ m = 2 \\ l = 4 \\ n = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} k = 1 \\ m = 2 \\ l = 5 \\ n = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \\ l = 4 \\ n = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \\ l = 5 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Полученные решения должны удовлетворять исходной системе. Проверка пока-зывает, что подходит только $\begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \\ l = 4 \\ n = 5 \end{cases}.$

Аналогично из системы (2) получим $\begin{cases} k = 5 \\ m = 4 \\ l = 1 \\ n = 2 \end{cases}$

Таким образом, $n = 5, m = 1, k = 2, l = 4$ или $n = 2, m = 4, k = 5, l = 1$

Пример 2.21.Если из натурального двузначного числа вычесть 63, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число, если цифра десятков, уменьшенная на 1, в четыре раза больше цифры единиц числа.

(Московский педагогический государственный университет).

Если x - цифра десятков, а y – цифра единиц, то условие задачи запишется в виде: $\begin{cases} x10 + y - 63 = y10 + x \\ x = 4y + 1 \end{cases}$.

Решая систему получим $y = 2,\ x = 9.$

Следовательно, искомое число равно 92.

Пример 2.22. Найдите целые корни уравнения:

$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0.$

(Олимпиада “Абитуриент-2008», МГУ)

По теореме Виета $x_1x_2 = 2(\sqrt{3} - 1);\ x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + 2.$ Откуда следует, что $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{3} - 1$.

Целым корнем является число 2.

Пример 2.23.Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества золотых монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 монет. (МГУ, экономический факультет)

Пусть n количество монет, $n \le 500$, а $x, y, z -$ количество пиратов при первом, втором и третьим дележом соответственно. Тогда по условию задачи имеем: $n = 13x + 8,$ (1)

$n = 11y + 3,$ (2)

$n = 8z + 5.$ (3)

Приравнивая уравнения (1) и (2), получим $13(x - 3) = 11(y - 4)$,

приравнивая уравнения (2) и (3) получим $8(z + 3) = 11(y + 2).$

Откуда $y = 13t + 4$ или $y = 8k - 2$.

Снова приравняем значения переменной y: $13t + 4 = 8k - 2$.

Получим $t = 8 + 2p, k = 4 + 13p$.

Подставим эти значения переменной t в уравнение (2):

$$n = 11y + 3 = 11(13t + 4) + 3 = 11(13(8 + 2p) + 4) + 3 \le 500 \qquad (4)$$

Решив неравенство (4), получим p=0 и $n = 333$.

Пример 2.24. Пообедав в кафе, приятели решили поделить расходы поровну. Если каждый внесет по 20 гривен, то для оплаты обеда не хватит 36 гривен. Если же каждый внесет по 27 гривен, то им не хватит 8 гривен.

Сколько было приятелей и сколько стоил обед?

(Черноморский филиал МГУ)

Пусть n — количество приятелей, тогда обед стоит $20n + 36 = 27n + 8$.

Откуда $n = 4$, а обед стоит $20 \cdot 4 + 36 = 116$.

Следовательно, было 4 человека, обед стоил 116 гривен.

Пример 2.25.Решить в целых числах уравнение: $9^x - 12y = 1$.

(МГУ, геологический факультет, устный экзамен)

При $x = 0$ и число $y = 0$ является решением. Левая часть исходного уравнения делится на 3, а правая нет, поэтому уравнение не имеет решений в целых числах при $x \ne 0$ и $y \ne 0$.

Пример 2.26. Целые числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа $5x - 4, y^2, 3z + 2$ - арифметическую прогрессию .

Найти x, y, z. (МГУ, «Абитуриент-2008»)

Условие задачи приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} y^2 = xz & (1) \\ 2y^2 = 5x + 3z - 2 & (2) \\ x, y, z \in Z \end{cases}$$

Подставим уравнение (1) в (2): $2xz = 5x + 3z - 2$ или $2zx - 3z = 5x - 2$,

то есть $z(2x - 3) = 5x - 2$, откуда $z = \frac{5}{2} + \frac{11}{2(2x-3)}$ и $2z = 5 + \frac{11}{2x-3}$.

Из условия целочисленности z получаем , что значение дроби $\frac{11}{2x-3} \in Z$.

Следовательно , $2x-3$ является делителем числа 11.

Так как 11 - простое число, то делители у него равны ± 1 или ± 11. Решая уравнения $2x-3$ $=\pm 1$ и $2x-3$ $=\pm 11$ и учитывая, что $xz>0$, получаем $x=2, z=8$ и $x=7, z=3$. Произведение xz должно быть квадратом целого числа y из (1), поэтому подходит только $x=2, z=8$ и тогда $y=\pm 4$.

Ответом являются числа $x=2, z=8, y=4$ **или** $x=2, z=8? y=-4$.

Пример 2.27.Строительная компания получила заказ на строительство 60 двухэтажных и 20 трехэтажных коттеджных домов. Каждая из 22 строительных бригад затрачивает на строительство 5 двухэтажных домов время, за которое она могла бы построить 3 трехэтажных. Сколько бригад следует выделить для строительства домов каждого типа, чтобы выполнить заказ за наименьшее время при условии, что все бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята строительством домов одного типа?

(МГУ, 2009, факультет государственного управления)

Пусть время, затрачиваемое одной бригадой на строительство одного двухэтажного коттеджа равно x, а время, затрачиваемое одной бригадой на строительство одного трехэтажного коттеджа равно y; а количество бригад, строивших двухэтажные дома равно n, тогда количество бригад, строивших трехэтажные дома равно $22-n$. Все двухэтажные дома будут изготовлены за время, равное $t_1 - \frac{60x}{n}$, а на все трехэтажные коттеджи будет затрачено время, равное $t_2 - \frac{20y}{22-n}$. По условию задачи получим, что $5x-3y$ (1).

Требуется найти такое распределение бригад(число бригад для строительства каждого типа домов), чтобы время выполнения заказа было наименьшим.

С учетом (1), получим $t_1=\frac{36y}{n}$, а $t_2=\frac{20y}{22-n}$.

Исходя из условия задачи $t_1=t_2$, $\frac{36y}{n}=\frac{22y}{22-n}$ и $\frac{18}{n}=\frac{11}{22-n}$.

Откуда получим, что $n=\frac{396}{29}=13\frac{19}{29}$.

На рисунке П.24 представлены графики функций $\frac{18}{n}$ и $\frac{11}{22-n}$.

Так как n - целое число, то $n - 14$, а $22 - n - 8$.

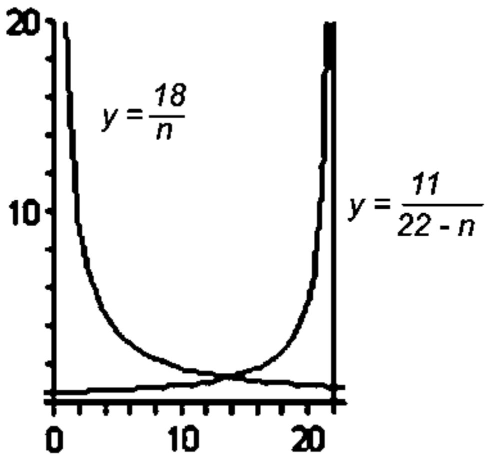

рис. П2.4

Получили ответ: 14 и 8 бригад.

Пример 2.28. Девяносто писем разложили по тринадцати ячейкам. В каждой ячейке оказалось по крайней мере по одному письму. Покажите, что по меньшей мере в две ячейки попало одинаковое число писем.

(МГУ, 2009, Черноморский филиал)

Допустим противное. Пусть в каждую ячейку попало разное число писем, тогда общее число писем во всех ячейках равно $1 + 2 + \cdots + 13 = \frac{(1+13)}{2}13 = 91$.

Получили писем больше, чем 90, таким, образом, наше предположение неверно и по меньшей мере в две ячейки попало одинаковое число писем, что и требовалось доказать.

Пример 2.29.Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $-3xy + 10x - 16y + 45 = 0$. (Олимпиада МФТИ, 2004)

Выразим из данного уравнения значение $x = \frac{16y-45}{10-3y} = -5 + \frac{y+5}{10-3y}$.

Выражение $\frac{y+5}{10-3y}$ должно быть целым числом.

Умножая обе части равенства $x = -5 + \frac{y+5}{10-3y}$ на число 3 и преобразуя его, получим, что $3x = -15 - 1 + \frac{25}{-3y+10}$.

Дробь $\frac{25}{-3y+10}$ должна быть целым числом. Делители числа 25 следующие числа $\pm1, \pm5, \pm25.$ Перебирая все делители числа 25, получим решения: $x = 3, y = 3;$ $x = -7, y = 5;$ $x = -5, y = -5,$ то есть ответом будут пары чисел $(3;3), (-7;5), (-5;-5).$

Пример 2.30. Определите сумму всех таких натуральных чисел $n,$ для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n+7$ соответственно. (МГУ, ИСАА)

Разложим числа на простые множители: $3920 = 2^4 7^2 5,$ $4320 = 2^5 3^3 5.$

По условию число 3920 должно делиться на n, а число 4320 - на $n+7$.

Числа и n и $n+7$ делятся на семь, а число 4320 не делится на семь, поэтому n будем искать в виде $2^k 5^t,$ где $k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$ $t = \{0, 1\}.$

Теперь делаем перебор всех делителей, проверяя делимость числа 4320 на $n+7$. При $t = 0$ получим $n = \{1,2,4,8,16,32\};$ $n+7 = \{8,9,11,15,23,37\}.$

Из них подходящие пары: $(1;8), (2;9), (8,15).$

При $t = 1$ получаем $n = \{5,10,20,40,80,160\};$

$n+7 = \{12,17,27,47,87,167\}.$

Из них подходящие пары: $(5;12), (20;27).$

Таким образом, подходящие n будут $1,2,8,5,20$, а их сумма равна 36.